Областная олимпиада по математике, 2008 год, 9 класс

1. Докажите, что для любого натурального числа n и неотрицательного действительного числа a выполняется неравенство

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}).$$

2. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB в точках M, N, P соответственно. Пусть D — точка на стороне NP такая, что $DP \cdot CD = BD \cdot DN$. Докажите, что $DM \perp PN$.

3. 10 чисел 1, 4, 7, …, 28 (разница между соседними числами 3) расположили на окружности. Пусть N — наибольшее из 10 сумм, полученных суммированием значений двух соседних чисел к каждому числу. Какое наименьшее возможное значение N?

4. Пусть M — точка внутри треугольника ABC. Известно, что $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ACM = 10^\circ$, $\angle CBM = 20^\circ$. Докажите, что $AB = MC$.

5. Определите все пары натуральных чисел (x, y) таких, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{[x,y]} + \frac{1}{(x,y)} = \frac{1}{2},$$

где (x, y) — наибольший общий делитель чисел x, y и $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x, y.

6. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города и на дорогах двустороннее движение). Известно, что из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.