Областная олимпиада по математике, 2008 год, 11 класс

1. В каждой из трех школ учатся по n учеников ($n \in N$). Каждый ученик имеет ровно $n+1$ знакомых в двух других школах. Докажите, что найдутся три ученика, по одному из каждой школы, которые дружат друг с другом.

2. В треугольнике ABC $AB > AC$. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C на биссектрису угла $\angle BAC$, соответственно. D – точка на прямой BC такая, что $DA \perp AP$. Докажите, что прямые BQ, PC и AD пересекаются в одной точке.

3. Определите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $f(p)$ является простым для любого простого натурального числа p.

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) D — середина AC, E — проекция D на BC, F — середина DE. Докажите, что прямые BF и AE перпендикулярны.

5. Пусть a, b, c — неотрицательные действительные числа, для которых

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2.$$

Докажите неравенство $ab + bc + ca \leq \frac{3}{2}$.

6. Докажите, что существует бесконечное число натуральных значений n, для каждого из которых $n!$ делится нацело на $n^2 + 1$.