Областная олимпиада по математике, 2008 год, 10 класс

1. Последовательность $\{a_n\}$, где $n \geq 0$ определена следующим образом: $a_0 = 3$ и $a_n = 2 + a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ для $n \geq 1$.
а) Докажите, что любые два члена этой последовательности являются взаимно простыми натуральными числами
б) Определите a_{2008}.

2. Дан треугольник ABC. Пусть K — середина высоты CH, I — центр вписанной окружности и T — точка касания вневписанной окружности со стороной AB. Докажите, что точки K, I, T лежат на одной прямой.

3. В таблице размером $5 \times n$, где $n \in N$, каждая клетка покрашена красным или синим цветом. Определите наименьшее возможное значение n такое, что для любой раскраски таблицы можно выбрать 3 строки и 3 столбца, для которых 9 клеток, образованных при их пересечении, имеют одинаковый цвет.

4. Пусть точка E лежит на стороне AC, а точка F лежит на стороне BC треугольника ABC, причем $AE = BF$. Окружности, описанные около треугольников ACF и BCE, пересекаются в точке D, отличной от C. Докажите, что CD – биссектриса $\angle ACB$.

5. Пусть a, b, c положительные действительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}}.$$

6. Докажите, что существует бесконечное число натуральных значений n, для каждого из которых $n!$ делится нацело на $n^2 + 1$.