Областная олимпиада по математике, 2007 год, 9 класс

1. Сумма трех неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3 не превосходит $1/2$. Докажите, что справедливо неравенство $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) \geq 1/2$.

2. Эльфы и тролли сидят за круглым столом, всего 60 существ. Тролли всегда лгут, эльфы говорят правду, кроме случаев, когда они «ошибаются». Каждый из сидящих утверждает, что сидит между эльфом и троллем, причем ровно два эльфа «ошиблись». Сколько троллей сидит за столом?

3. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. AO пересекает BC в точке K. На сторонах AB и AC взяты точки L и M, соответственно, отличные от B и C, так, что $KL = KB$ и $KM = KC$. Докажите, что LM и BC параллельны.

4. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_0 = a$, $x_1 = 2$, $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ для любого $n \geq 2$. Найдите все целые a, такие, что $2x_{3n} - 1$ есть полный квадрат для любого $n \geq 1$.

5. A, B, C ходят со скоростью 5 километров в час. У них есть автомобиль, который вмещает только двоих, скорость его 50 километров в час. Могут ли они втроем преодолеть расстояние в 62 км, потратив менее 3 часов?

6. Найдите все тройки простых чисел $p \leq q \leq r$, такие, что числа $pq + r$, $pq + r^2$, $qr + p$, $qr + p^2$, $rp + q$, $rp + q^2$ являются также простыми.

7. Изменяя за один шаг на единицу один из коэффициентов a, b, c уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно за несколько шагов из $x^2 + 7x + 2007 = 0$ получить $7x^2 + 2007x + 1 = 0$. Возможно ли, чтобы при этом ни одно из получаемых уравнений не имело целых корней?

8. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ треугольники ABC, BCD, CDE, DEA и EAB имеют одинаковую площадь. Прямые AC и AD пересекают BE в точках M и N. Докажите, что $BM = EN$.