Областная олимпиада по математике, 2007 год, 11 класс

1. Эльфы и тролли сидят за круглым столом, всего 60 существ. Тролли всегда лгут, эльфы говорят правду, кроме случаев, когда они «ошибаются». Каждый из сидящих утверждает, что сидит между эльфом и троллем, причем ровно два эльфа «ошиблись». Сколько троллей сидит за столом?

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD, D лежит на стороне AC. Пусть E и F основания перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямую BD, соответственно. M — такая точка на стороне BC, что DM перпендикулярно BC. Докажите, что $\angle EMD = \angle DMF$.

3. Пусть n — натуральное число, p — простое, причем $(n+1)^p - n^p$ делится на некоторое натуральное число q. Докажите, что $(q-1)$ делится на p.

4. Найдите все функции $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, которые удовлетворяют условиям: а) для любых $x, y \in [0,+\infty)$ с условием $x+y>0$ выполняется равенство $f(xf(y)) \cdot f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$; б) $f(1)=0$; в) $f(x)>0$ для любого $x>1$.

5. Многочлен $x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k$ имеет ровно k различных корней, $k \geq 2$. Докажите, что $a_1^2 > \frac{2ka_2}{k-1}$.

6. Дан треугольник ABC. Пусть r — радиус вписанной в него окружности; r_a — радиус полуокружности с центром на стороне BC, касающейся сторон AB и AC. Аналогично определяются r_b и r_c. Докажите справедливость равенства $2/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$.

7. Чудаковатый математик написал книгу, страницы которой пронумерованы от 2 до 400 и читать которую следует так: сначала находим последнюю страницу (400-ю) и читаем страницы (по возрастанию) с номерами, которые имеют общие делители > 1 с 400. Затем берем последнюю из непрочитанных страниц и повторяем то же самое, то есть уже читаем страницы с номерами, имеющими общий делитель >1 с 399. Далее процесс повторяется с последней непрочитанной страницей и так далее. Итак, последовательно нами будут прочитаны страницы с номерами: 2, 4, 5, ..., 400, 3, 7, 9, ..., 399, ... Какая страница будет прочитана последней?

8. Найдите все четверки рациональных чисел a, b, c, d, удовлетворяющие уравнениям: $8a^2 - 3b^2 + 5c^2 + 16d^2 - 10ab + 42cd + 18a + 22b - 2c - 54d = 42$, $15a^2 - 3b^2 + 21c^2 - 5d^2 + 4ab + 32cd - 28a + 14b - 54c - 52d = -22$.