

# Областная олимпиада по математике, 2007 год, 10 класс

1. Эльфы и тролли сидят за круглым столом, всего 60 существ. Тролли всегда лгут, эльфы говорят правду, кроме случаев, когда они «ошибаются». Каждый из сидящих утверждает, что сидит между эльфом и троллем, причем ровно два эльфа «ошиблись». Сколько троллей сидит за столом?
2. Пусть  $M$  — произвольная точка на меньшей из двух дуг  $CD$  описанной около квадрата  $ABCD$  окружности. Прямая  $AM$  пересекает  $BD$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $R$ , соответственно. Прямая  $BM$  пересекает отрезки  $AC$  и  $DC$  в точках  $Q$  и  $S$ , соответственно. Докажите, что прямые  $PS$  и  $QR$  перпендикулярны.
3. Вещественная функция определена на  $[0,1]$  и удовлетворяет условию  $f(1/n) = (-1)^n$  для любого натурального  $n$ . Докажите, что  $f$  нельзя представить в виде разности возрастающих функций.
4. Пусть  $n$  — натуральное число,  $p$  — простое, причем  $(n+1)^p - n^p$  делится на некоторое натуральное число  $q$ . Докажите, что  $(q-1)$  делится на  $p$ .
5.  $*$  — операция, заданная на ненулевых действительных числах, удовлетворяющая условиям:
  1.  $a * a = 1$  для любого  $a \neq 0$ ;
  2.  $a * (b * c) = (a * b)c$  ( $a * b$  справа обычно умножается на  $c$ ) для любых  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ . Решите уравнение  $x * 36 = 216$ .
1. Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $r$  — радиус вписанной в него окружности;  $r_a$  — радиус полуокружности с центром на стороне  $BC$ , касающейся сторон  $AB$  и  $AC$ . Аналогично определяются  $r_b$  и  $r_c$ . Докажите справедливость равенства  $2/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$ .
2. Чудаковатый математик написал книгу, страницы которой пронумерованы от 2 до 400 и читать которую следует так: сначала находим последнюю страницу (400-ю) и читаем страницы (по возрастанию) с номерами, которые имеют общие делители  $> 1$  с 400.

Затем берем последнюю из непрочитанных страниц и повторяем то же самое, то есть уже читаем страницы с номерами, имеющими общий делитель  $>1$  с 399. Далее процесс повторяется с последней непрочитанной страницей и так далее. Итак, последовательно нами будут прочитаны страницы с номерами: 2, 4, 5, ..., 400, 3, 7, 9, ..., 399, .... Какая страница будет прочитана последней?

**3.**  $0 < a_1 < \dots < a_n$  — заданные числа. Решение неравенства

$$\frac{a_1}{x + a_1} + \frac{a_2}{x + a_2} + \dots + \frac{a_n}{x + a_n} \geq 1$$

составляет объединение нескольких непересекающихся промежутков. Найдите сумму их длин.