

# Областная олимпиада по математике, 2006 год, 9 класс

1. Вася взял 11 подряд идущих натуральных чисел и перемножил их. Коля взял эти же 11 чисел и сложил их. Могли ли две последние цифры результата Васи совпасть с последними двумя цифрами результата Коли?
2. Набор, состоящий из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , заменили на набор  $a^4 - 2b^2$ ,  $b^4 - 2c^2$ ,  $c^4 - 2a^2$ . В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , если их сумма равна  $-3$ .
3. На основании  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$ . Докажите, что окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $CBD$ , точками касания не могут делить отрезок  $BD$  на три равных части.
4. Решите уравнение  $3(p^q + q^p) = n!$ , где  $p$ ,  $q$  — простые,  $n$  — натуральное.
5. На плоскости провели 8 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?
6. Каждая из точек плоскости покрашена в один из трех цветов, причем все три цвета используются. Верно ли, что при любой такой покраске можно выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов?
7. У продавца есть стрелочные весы для взвешивания сахара с двумя чашками. Весы могут показывать вес от 0 до 5000 г. При этом сахар можно класть только на левую чашку, а гири можно ставить на любую из двух чашек. Какое наименьшее количество гирь достаточно иметь продавцу, чтобы одним взвешиванием можно было отмерить любое количество сахара от 0 до 25000 г? Ответ объясните.
8. На сторонах  $AC$ ,  $BA$ ,  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  так, что  $\angle AKL = \angle CKM = \angle ABC$ . Отрезки  $AM$  и  $CL$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что точки  $L$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $P$  лежат на одной окружности.
9. Вася назвал натуральное число  $N$ . После чего Петя нашел сумму цифр числа  $N$ , потом сумму цифр числа  $N + 7N$ , потом сумму цифр числа  $N +$

$2 \cdot 7N$ , потом сумму цифр числа  $N + 3 \cdot 7N$ , и т.д. Мог ли он каждый следующий раз получать результат больший предыдущего?

- 10.** В стране есть несколько городов, соединенных дорогами. Каждая дорога соединяет только 2 города, и на ней введено одностороннее движение; при этом пара городов соединена не более чем одной дорогой. Выехав из любого города, нельзя в него вернуться. Известно, что из города  $A$  в город  $B$  можно проехать ровно 2006 способами. Найдите минимальное возможное число городов в стране.