Областная олимпиада по математике, 2006 год, 11 класс

1. Пусть $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$ — уравнения трех касательных к параболе $y = x^2$. Докажите, что если $k_3 = k_1 + k_2$, то $b_3 \geq 2(b_1 + b_2)$.

2. На классном математическом конкурсе выдали 10 легких и 10 сложных задач. Выяснилось, что все участники решили разное количество задач, причем Вася решил меньше всех. Однако, когда жюри начислило за каждую сложную задачу по 2 балла, а за каждую простую — по одному. Вася набрал больше баллов, чем любой другой участник. Какое максимальное число детей могло участвовать в конкурсе?

3. Решите уравнение $3(p^q + q^p) = n!$, где p, q — простые, n — натуральное.

4. На прямой даны точки A, B, C (B лежит между A и C). Через точки A и B проводится произвольная окружность ω. Из точки C к окружности проведены касательные, касающиеся ω в точках D и E. Найдите геометрическое место середин отрезков DE.

5. Для натуральных чисел m и n обозначим через $F(m, n)$ количество всех связных клеточных фигур в прямоугольнике $m \times n$. Докажите, что четность $F(m, n)$ совпадает с четностью числа $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$. (Связная клеточная фигура — это такое непустое множество клеток, что из любой клетки этого множества можно пройти в любую другую клетку этого множества, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетки).

6. Решите в натуральных числах уравнение $\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = ab$. (НОД — наибольший общий делитель, НОК — наименьшее общее кратное).

7. Уравнение $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня. Оказалось, что первый корень является синусом, второй — косинусом, а третий — тангенсом одного угла. Найдите все такие уравнения.

8. Можно ли нарисовать на плоскости 2005 ненулевых векторов так, что из любых десяти из них можно выбрать три с нулевой суммой?

9. Докажите, что несократимую дробь $\frac{m}{n}$ можно представить в виде отношения

$$\frac{2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}}{2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_l}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — различные натуральные числа, тогда и только тогда, когда сумма $m + n$ нечетна.

10. Проекции боковых ребер треугольной пирамиды на плоскость ее основания имеют равные длины. Также равные длины имеют проекции боковых ребер на плоскости противоположных боковых граней. Один из плоских углов при вершине пирамиды равен 120°. Найдите два других плоских угла при вершине.