Областная олимпиада по математике, 2006 год, 10 класс

1. Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.

2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямую EF. Докажите, что если стороны треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию и AC — средняя сторона, то $ME + FN = EF$.

3. На классном математическом конкурсе выдали 10 легких и 10 сложных задач. Выяснилось, что все участники решили разное количество задач, причем Вася решил меньше всех. Однако, когда жюри начислило за каждую сложную задачу по 2 балла, а за каждую простую — по одному. Вася набрал больше баллов, чем любой другой участник. Какое максимальное число детей могло участвовать в конкурсе?

4. Решите уравнение $3(p^q + q^p) = n!$, где p, q — простые, n — натуральное.

5. На плоскости провели 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

6. Решите в натуральных числах уравнение $\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = ab$. (НОД — наибольший общий делитель, НОК — наименьшее общее кратное).

7. На сторонах AC, BA, BC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L, M так, что $\angle AKL = \angle CKM = \angle ABC$. Отрезки AM и CL пересекаются в точке P. Докажите, что точки L, B, M, P лежат на одной окружности.

8. Вася назвал натуральное число N. После чего Петя нашел сумму цифр числа N, потом сумму цифр числа $N + 13N$, потом сумму цифр числа $N + 2 \cdot 13N$, потом сумму цифр числа $N + 3 \cdot 13N$, и т.д. Мог ли он каждый следующий раз получать результат больший предыдущего?

9. Можно ли нарисовать на плоскости 2005 ненулевых векторов так, что из любых десяти из них можно выбрать три с нулевой суммой?

10. Имеется куча из $N > 1$ камней. Двое играют в игру. За один ход можно либо забрать один камень из любой кучи, либо разделить любую имеющуюся кучку на две произвольным образом (если в куче более одного камня). Побеждает тот, кто заберет последний камень. Кто из соперников сможет победить независимо от игры соперника?