

# Областная олимпиада по математике, 2005 год, 9 класс

1. Решите в целых числах уравнение  $19x^2 + 28y^2 = 729$ .
2. Найдите сумму:  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$ , где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .
3. Докажите неравенство:  $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника периметра 2.
4. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} xy + y^2 + x = 5y, \\ x^2 + xy = 6y. \end{cases}$$
5. Докажите, что если положительные числа  $a, b, k, n$  удовлетворяют неравенству  $ab > ak + bn$ , то  $a + b > (\sqrt{k} + \sqrt{n})^2$ .
6. Докажите, что если все стороны треугольника меньше 1, то его площадь меньше  $\sqrt{3}/4$ .
7. Определите, какое из чисел больше  $\sqrt{11}$  или  $5 - \sqrt[3]{5}$ .
8. Пусть функция  $y = f(x)$  при всех действительных  $x$  определена, непрерывна и удовлетворяет условию:  $f(f(x)) = f(x) + x$ . Найдите две такие функции  $f$  (не равные тождественно нулю).