

# Областная олимпиада по математике, 2005 год, 11 класс

1. Сравните числа  $\frac{\ln 2004}{\ln 2005}$  и  $\frac{\ln 2005}{\ln 2006}$ .
2. Доказать справедливость неравенства  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — внутренние углы некоторого треугольника.
3. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  выполнено  $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ . Найдите угол между сторонами  $BC$  и  $AD$ .
4. Докажите равенство  $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ .
5. Исследовать на ограниченность числовую последовательность:  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ , ( $n \geq 1$ ).
6. Докажите для любых положительных чисел  $x$  и  $y$  неравенство:  $x \cdot 2^y + y \cdot 2^{-x} \geq x + y$ .
7. Найдите первообразную  $f(x) = \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}$ .
8. Длины сторон треугольника — неравные между собой целые числа, а меньшая высота равна 8. Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной в треугольник окружностей.