

Областная олимпиада по математике, 2005 год, 11 класс

1. Сравните числа $\frac{\ln 2004}{\ln 2005}$ и $\frac{\ln 2005}{\ln 2006}$.
2. Доказать справедливость неравенства $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, где α, β, γ — внутренние углы некоторого треугольника.
3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. Найдите угол между сторонами BC и AD .
4. Докажите равенство $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.
5. Исследовать на ограниченность числовую последовательность: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, ($n \geq 1$).
6. Докажите для любых положительных чисел x и y неравенство: $x \cdot 2^y + y \cdot 2^{-x} \geq x + y$.
7. Найдите первообразную $f(x) = \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}$.
8. Длины сторон треугольника — неравные между собой целые числа, а меньшая высота равна 8. Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной в треугольник окружностей.