

Областная олимпиада по математике, 2005
год, 10 класс

1. Решите в целых числах уравнение: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

2. Сравнить числа $\cos(\sin(2005))$ и $\sin(\cos(2005))$.

3. Докажите справедливость тождества

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит его сторону AB на отрезки AD и DB с длинами 5 см и 3 см соответственно. Величина, угла A равна 60° . Найдите длину стороны BC .

5. Найдите сумму: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

6. В равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB = CD$) вписана окружность. Пусть M — точка касания окружности со стороной CD , K — точка пересечения окружности с отрезком AM , L — точка пересечения окружности с отрезком BM . Найдите величину $\frac{AM}{AK} + \frac{BM}{BL}$.

7. Числа a, b, c, d положительны. Докажите неравенство $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} \geq 4(a - d)$ и выясните, при каких a, b, c, d оно обращается в равенство.

8. Решить в рациональных числах уравнение: $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0$.