# Областная олимпиада по математике, 2004 год, 9 класс

**1.** Биссектриса угла $C$ прямоугольного треугольника $ABC$ пересекает гипотенузу $AB$ в точке $D$ и точка $M$ — середина $AD$. На $CD$ как на стороне построен квадрат $CDEF$ так, что точки $A$ и $F$ лежат по разные стороны от прямой $CD$. Докажите, что $\angle ACM = \angle FAC$.

**2.** В некоторой организации участвуют 100 стран. Некоторые из этих стран могут образовать сообщества, но число стран в одном сообществе не должно превосходить 50. Известно, что любые две страны из организации является членом некоторого сообщества. Какое минимальное количество сообществ создано внутри организации?

**3.** Найдите целую часть числа $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}$.

**4.** На доске написаны числа 5, 7 и 9. Если на доске написаны числа $a$, $b$ и $a > b$, то за один ход на доске можно написать новое число $5a - 4b$. Выясните: а) какое наибольшее число, не превосходящее 2004, может быть записано на доске? б) за какое наименьшее число ходов оно может быть получено?

**5.** Даны числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., $n$, $n$. При каких значениях $n$ эти числа можно так объединить в $n$ пар, чтобы сумма чисел, стоящих в каждой паре, давали при делении на $n$ различные остатки?

**6.** Найдите все действительные решения системы: $\begin{cases} x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y, \\ y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x. \end{cases}$

**7.** В данном множестве $A$ целых положительных чисел верно условие: для любых различных $x, y \in A$ выполняется неравенство $|x - y| \geq \frac{xy}{30}$. Какое максимальное количество элементов может содержать данное множество $A$?

**8.** Периметр треугольника $ABC$, где $AB < AC$, в 7 раз больше длины $BC$. Вписанная окружность треугольника касается стороны $BC$ в точке $E$, и диаметр $DE$ этой окружности пересекает медиану из вершины $A$ в точке $F$. Найдите отношение $DE : DF$.