Областная олимпиада по математике, 2004 год, 11 класс

1. Школьник выбрал два целых положительных числа m и n. Он называет целое положительное число k *хорошим*, если из отрезков длинами $\log_3 m$, $\log_3 n$ и $\log_3 k$ можно построить треугольник. Он нашел все хорошие числа, их оказалось ровно 100. Найдите максимально возможное значение m.

2. Основание $ABCDE$ пирамиды с вершиной S вписано в окружность и $AB < DE$. Если SA – самое длинное ребро, выходящее из вершины S, то докажите, что $SB > SC$.

3. В олимпиаде участвуют 45 школьников. Выяснилось, что любые двое из них, имеющие одинаковое количество знакомых среди участников олимпиады, не знакомы друг с другом. Каково наибольшее возможное число знакомых пар школьников среди участников олимпиады?

4. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$, где $\mathbb{R}^+$ обозначает множество неотрицательных действительных чисел.

5. Сумма положительных действительных чисел x, y и z равна 1. Докажите неравенство:

$$\sqrt{xy+z} + \sqrt{yz+x} + \sqrt{zx+y} \leq \frac{xy+z}{x+y} + \frac{yz+x}{y+z} + \frac{zx+y}{z+x}.$$

6. Джамиля выбирает положительное целое число n и сообщает его Махамбету. Махамбет в свою очередь выбирает число k и сообщает его Джамиле. Джамиля на бумаге чертит n различных окружностей и выбирает k различных точек, каждая из которых принадлежит, по крайней мере, одной из окружностей. Потом она стирает все окружности, оставляя на бумаге лишь выбранные k точек. Какое наименьшее число должен выбрать Махамбет, чтобы по оставшимся точкам наверняка восстановить одну из окружностей?

7. Пусть правильный 2004-угольник вписан в окружность единичного радиуса. Рассмотрим множество Q четырехугольников, все вершины

которых совпадают с некоторыми вершинами этого многоугольника, а длины сторон и диагоналей не равны 2. Пусть R – подмножество Q, состоящее из четырехугольников, содержащих центр окружности внутри себя. Докажите, что число элементов R составляет ровно половину числа элементов Q.

8. Для каких простых чисел p уравнение $x^2 + y^2 = 2003 + pz$ имеет решение в целых числах x, y и z?