Областная олимпиада по математике, 2004 год, 10 класс

1. Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}.$$

2. Опишите все многочлены $P(x)$ с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющие условию: для каждого целого положительного n число 2^n-1 делится на $P(n)$.

3. Длина пяти ребер тетраэдра, вписанного в сферу радиуса 2, равна 3. Найдите длину шестого ребра тетраэдра.

4. Найдите все функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такие, что $f(x+y)+f(x)f(y)=f(x)+f(y)+f(xy)$, где $\mathbb{R}^+$ обозначает множество неотрицательных действительных чисел.

5. Для положительных действительных чисел a, b и c докажите неравенство:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\geq 1.$$

6. Внутри треугольника выбраны окружности ω_1, ω_2, ω_3 одинакового радиуса такие, что каждая из них касается двух сторон треугольника, а окружность ω касается этих окружностей внешним образом. Докажите, что центр окружности ω лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

7. Можно ли найти множество S из 2004 различных целых положительных чисел такое, что для любых a, $b\in S$ имеет место равенство НОД$(a,b)=|a-b|$?

8. Пусть правильный 2004-угольник вписан в окружность единичного радиуса. Рассмотрим множество Q четырехугольников, все вершины которых совпадают с некоторыми вершинами этого многоугольника, а длины сторон и диагоналей не равны 2. Пусть R — подмножество Q, состоящее из четырехугольников, содержащих центр окружности внутри себя. Докажите, что число элементов R составляет ровно половину числа элементов Q.