Областная олимпиада по математике, 2003 год, 9 класс

1. Найдите действительные числа x_1, x_2, ..., x_{2003}, любое из которых равно сумме квадратов остальных чисел.

2. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины C на прямые, содержащие биссектрисы углов $\angle BAC$ и $\angle ABC$ соответственно. Докажите, что прямые AB и PQ — параллельны.

3. Клетчатая доска размера $2m \times 2n$ (m и n — натуральные числа) полностью покрыта доминошками размера 1×2 без наложений. Докажите, что эту доску можно полностью покрыть вторым слоем доминошек так, что никакие две доминошки первого и второго слоя не будут совпадать.

4. На столе лежит 2003 камня. Двое игроков по очереди убирают некоторое количество камней, не меньше одного, но не больше половины из оставшихся камней на каждом шагу. Проигрывает тот, после хода которого останется 1 камень. Какой из игроков, первый или второй, при правильной игре победит в данной игре?

5. Пусть положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab+bc+ca=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

6. Пусть $a_n = n^2+500$ и $d_n = 2+\text{НОД}(a_n, a_{n+1})$ для любого натурального n. Определите наибольшее значение d_n.

7. Пусть точка D является серединой дуги BC (не содержащей точки A) описанной окружности $\triangle ABC$. Точка E является зеркальным отображением точки D относительно прямой BC. Точки K, L, M, N являются серединами отрезков AE, AB, BC, CA соответственно. Докажите, что точка K лежит на описанной окружности $\triangle LMN$.

8. Алпамыс выписал в тетради семь натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_7 и выписал на доске числа $a_i \cdot a_j$, a_i+a_j, $|a_i-a_j|$ для всех $i \neq j$. Найдите наибольшее возможное количество различных нечетных чисел на доске.