Областная олимпиада по математике, 2003 год, 11 класс

1. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC $(AC = BC)$ взята точка D такая, что $AD^2 = BD \cdot BC$ $(D \neq C)$. Докажите, что $AD = AB$.

2. Найдите все функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, удовлетворяющие уравнению $f(3x + 2y) = f(x)f(y)$, для всех $x, y \in \mathbb{N}_0$. (Запись $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ означает, что функция f определена на всем множестве неотрицательных целых чисел, и все значения функции f являются неотрицательными целыми числами).

3. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$$

имеет решение в натуральных числах.

4. Пусть $S = \{1,;2,\dots,;n\}$. Докажите, что количество всевозможных троек множеств (A, B, C) таких, что $\varnothing \subseteq A \subseteq B \subseteq C \subseteq S$ и $|B| = \frac{|A|+|C|}{2}$, равно C_{2n}^n. (Здесь $|X|$ означает количество элементов во множестве X, а $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!}$).

5. Дан треугольник ABC. Окружность Γ содержит вершину A и касается стороны BC в точке P. Окружность Γ пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что дуги MP и NP равны тогда и только тогда, когда окружность Γ касается окружности, описанной около треугольника ABC.

6. Найдите все натуральные числа x, y такие, что $x^2 + 1$ делится на y, а $y^3 + 1$ делится на x^2.

7. На международной конференции официальными являются четыре языка, причем любые два участника конференции могут разговаривать хотя бы на одном общем официальном языке. Докажите, что среди официальных языков найдется хотя бы один, на котором разговаривают не менее 60 всех участников конференции.

8. На плоскости расположено 2003 отрезка суммарной длины 1. Докажите, что существует прямая l такая, что сумма длин проекций заданных отрезков на прямую l меньше, чем $2/3$.