Областная олимпиада по математике, 2003 год, 10 класс

1. Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых справедливо уравнение

$$xy^2 + xy + x^2 - 2y - 1 = 0.$$

2. Пусть функция g определена на натуральных числах $1 \leq n \leq 2003$ по следующему правилу 1) $g(2) = 1$; 2) $g(2n) = g(n)$; 3) $g(2n+1) = g(2n) + 1$.

3. Последовательность чисел x_1, x_2, ..., x_n, принадлежащих интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяет условию $\mathrm{tg} x_1 + \mathrm{tg} x_2 + \cdots + \mathrm{tg} x_n \leq n$. Докажите, что $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \cdots \cdot \sin x_n \leq 2^{-\frac{n}{2}}$.

4. На каждой стороне параллелограмма выбрана внутренняя точка. Докажите, что периметр полученного четырехугольника не меньше удвоенной длины наименьшей диагонали исходного параллелограмма.

5. Для каких натуральных чисел n существуют действительные числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, удовлетворяющие следующему условию:

$$\{a_j - a_i | 1 \leq i < j \leq n\} = \left\{1, ; 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}\right\} \ ?$$

6. В треугольнике ABC биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K, а описанную окружность в точке L $(L \neq C)$. Обозначим через V центр вписанной окружности треугольника ABC, через S — центр описанной окружности треугольника KBV, через Z — точку пересечения прямой AB и SL. Докажите, что прямая SK касается описанной окружности $\triangle KLZ$.

7. Известно, что многочлен $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет четыре различных натуральных корня и $p(2003) = 2002$. Пусть $q(x) = x^2 - 2x + 2003$. Известно также, что многочлен $p(q(x))$ не имеет действительных корней. Определите значение a.

8. На международной конференции официальными являются четыре языка, причем любые два участника конференции могут разговаривать хотя бы на одном общем официальном языке. Докажите, что среди официальных языков найдется хотя бы один, на котором разговаривают не менее 60 всех участников конференции.