Областная олимпиада по математике, 2002 год, 11 класс

1. Дана окружность ω, и точки P и Q на ней. Пусть M — середина PQ. На окружности выбраны точки A и C таким образом, что AC проходит через M. Также на окружности выбраны точки C и D таким образом, что $ABCD$ является трапецией. Прямая AB параллельна прямой CD, и обе они параллельны PQ. Докажите, что точка X, являющаяся точкой пересечения прямых AD и BC, не зависит от выбора точки A на данной окружности.

2. Найдите все значения целого n при котором многочлен $P(x) = x^5 - nx - n - 2$ может быть представлен в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами (не являющихся константами).

3. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют равенству $x + y + z = 0$. Докажите, что $6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3$.

4. В трех школах учатся по 200 школьников в каждой. У каждого школьника имеется как минимум один друг в каждой школе (если школьник a является другом школьника b, то b является другом a). Известно, что множество Σ, состоящее из 300 школьников, такое что для любой школы S и любых двух школьников x, $y \in \Sigma$ которые не учатся в школе S, число друзей в школе S для x и y различны. Докажите, что найдутся три ученика, по одному из каждой школы, которые дружат друг с другом.

5. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для которых при любых вещественных x и y справедливо равенство $f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая проходит через B и вторично пересекает первую окружность в точке C, вторую — в точке D. Касательные к первой окружности в C, а ко второй — в D пересекаются в точке M. Через точку пересечения AM и CD проходит прямая, параллельная CM, пересекающая AC в точке K. Докажите, что KB касается второй окружности.

7. Пусть $a, b, c, d > 0$ и $\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1$. Докажите, что $abcd \geq 3$.

8. В алфавите некоторого языка имеется n букв. Последовательность букв называется словом тогда и только тогда, если между любыми двумя одинаковыми буквами в ней не найдется двух одинаковых букв. Найдите количество слов максимально возможной длины.