Областная олимпиада по математике, 2002 год, 10 класс

1. Докажите, что для любых вещественных положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

2. Найдите все натуральные числа a, b и c, удовлетворяющие равенству $a! + 2002b! = c!$.

3. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внутренним образом (радиус ω_1 меньше радиуса ω_2) в точке A. К окружности ω_1 проведена касательная l, параллельная прямой, проходящей через центры окружностей. l касается ω_1 в точке B и пересекает окружность ω_2 в точках C и D. Докажите, что AB является биссектрисой угла CAD.

4. В трех школах учатся по 200 школьников в каждой. У каждого школьника имеется как минимум один друг в каждой школе (если школьник a является другом школьника b, то b является другом a). Известно, что существует множество Σ, состоящее из 300 школьников, такое что для любой школы S и любых двух школьников x, $y \in \Sigma$ которые не учатся в школе S, число друзей в школе S для x и y различны. Докажите, что найдутся три ученика, по одному из каждой школы, которые дружат друг с другом.

5. Решите следующую систему уравнений в вещественных положительных числах:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 9, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1. \end{cases}$$

6. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для которых при любых вещественных x и y справедливо равенство $f(xf(y) + x) = xy + f(x)$.

7. В треугольнике ABC длины всех сторон являются целыми числами, а радиус вписанной окружности равен 1. Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным.

8. Дана колода из 52 карт над которыми разрешается проводить следующие операции: а) менять местами первые две карты; б) переставлять первую карту на последнее место. Докажите, что используя эти операции можно расставить карты в произвольном порядке.