Областная олимпиада по математике, 2001 год, 9 класс

1. Докажите, что любое натуральное число представимо в виде $x^2 - y^2 + z^2$, где x, y, z — натуральные числа.

2. В каждой клетке таблицы 3×3 написаны действительные числа. Элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен модулю разности между суммой чисел i-й строки и суммой чисел j-го столбца $(i, j = 1, 2, 3)$. Докажите, что любой элемент данной таблицы представим в виде суммы или в виде разности каких-нибудь двух других элементов.

3. В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC произвольным образом выбрана точка D. Пусть E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AB и AC, соответственно. Докажите, что

$$\frac{4S^2}{AC^2 + AB^2} \leq DE^2 + DF^2 \leq \max(h_b^2, h_c^2),$$

где S — площадь треугольника, h_b и h_c — длины высот, опущенных из вершин B и C, соответственно.

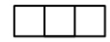
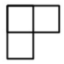
4. Три ученика A, B и C сдают тесты для поступления в лицей. Тесты проводятся в несколько туров. В каждом туре определяются самый лучший, средний и плохой результаты. За самый лучший результат дается x очков, средний y очков а плохой — z очков, где $x > y > z$ — натуральные числа. В результате всех туров A набрал 22 очка, B и C по 9 очков каждый. Известно, что в первом туре ученик B показал самый лучший результат. Сколько было проведено туров, и как в каждом туре были распределены места?

5. Сумма трех целых чисел a, b, c делится на 3. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + ((a - b)(b - c)(c - a))^2$ также делится на 3.

6. Докажите, что для любых вещественных чисел x и y справедливо неравенство

$$\left| \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

7. Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$ по крайней мере две стороны параллельны тогда и только тогда, когда произведение площадей треугольников ABD и BCD равно произведению площадей треугольников ABC и ACD.

8. Клетка клетчатой доски 7×7 называется *плохой*, если удалив ее оставшуюся часть нельзя будет замостить пятнадцатью фигурками вида  и одной фигуркой вида . Укажите все *плохие* клетки.