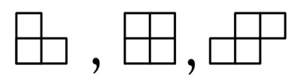
# Областная олимпиада по математике, 2001 год, 11 класс

**1.** Дана последовательность чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющих условиям $a_{125} \neq 0$, $a_i \cdot a_j = a_{i+j} \cdot (a_i + a_j)$, для любых натуральных $i$, $j$. Чему равно $a_{2000}$, если $a_{2001} = 2000$?

**2.** Решить в натуральных числах уравнение $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = b^2$.

**3.** В остроугольном треугольнике $ABC$ на стороне $BC$ выбрана точка $D$. Пусть $E$ и $F$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $D$ на стороны $AB$ и $AC$ соответственно. Докажите, что если $DE^2 + DF^2$ принимает минимальное из всех возможных значений, то угол между $AD$ и биссектрисой угла $A$ равен углу между биссектрисой и медианой, опущенных из вершины $A$.

**4.** Докажите, что любое целое число представимо в виде $x^2 + y^2 + z^3$, где $x$, $y$ и $z$ — целые числа.

**5.** Клетчатая доска $2001 \times 2001$ разбита на фигурки трех видов  . Докажите, что фигурок первого вида не меньше чем 4003.

**6.** Докажите неравенство $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \leq 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^n}{n!}$, где $a_i > 0$ , $i = 1, 2, \ldots, n$ и $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

**7.** Дан четырехугольник $ABCD$ и точка $F$ внутри него. Известно, что $ABCF$ — параллелограмм. Докажите, что

$$S_{ABC} \cdot S_{ACD} + S_{AFD} \cdot S_{FCD} = S_{ABD} \cdot S_{BCD}.$$

**8.** Даны натуральные числа $q$, $n$ и $r$, $0 < r \leq n$. Докажите, что число $(q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{r-1})$ делится на $r!$.