Областная олимпиада по математике, 2001 год, 10 класс

1. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $f(x-f(y))=1-x-y$, для любых вещественных x и y.

2. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=1$. Доказать справедливость неравенства

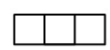
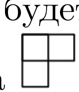
$$\sqrt{3a+b+1}+\sqrt{3b+c+1}+\sqrt{3c+a+1}\le\sqrt{21}.$$

3. Докажите, что утроенную сумму трех квадратов целых чисел можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром BD. Пусть F симметрично A относительно BD, а N — точка пересечения AF и BD. Прямая, проходящая через N и параллельно AC, пересекается с прямыми CD и BC в точках P и Q, соответственно. Докажите, что точки P, C, Q и F — вершины прямоугольника.

5. Дана последовательность $x_1,x_2,\dots,x_n$ состоящая из чисел 0, 1, 2, 3. Для любого $i=1$, 2, …, $n-1$, $\overline{x_ix_{i+1}}$ не принимает ни одно из следующих значений: 12, 13, 32 и 33. Сколько всего существует таких последовательностей?

6. Докажите, что прямая, делящая площадь и периметр треугольника пополам, проходит через центр вписанной окружности.

7. Клетка клетчатой доски 7×7 называется *плохой*, если удалив ее оставшуюся часть нельзя будет замостить пятнадцатью фигурками вида  и одной фигуркой вида . Укажите все *плохие* клетки.

8. Дан многочлен $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, где $0\le a_i\le a_0$, $i=1$, 2, …, n. Пусть a — коэффициент многочлена $(P(x))^2$ при x^{n+1}. Докажите, что $2a\le(P(1))^2$.