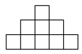
Областная олимпиада по математике, 2000 год, 9 класс

1. При каких значениях p, можно замостить квадрат размером $p \times p$ без наложения фигурками вида  ?

2. На доске написаны три целых числа. На каждом шаге стирается одно число и вместо него записывается сумма оставшихся двух, уменьшенное на единицу. После нескольких таких ходов на доске остались числа 17, 75, 91. Могло ли первоначально написанные числа равняться: а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3?

3. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке C и касается стороны AB в точке K. Докажите, что луч CK делит угол C пополам.

4. Докажите равенство

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\dots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\dots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{313}.$$

5. Решите уравнение в целых числах $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$.

6. На доске размером 1999×1999 покрашено несколько квадратиков 1×1 так, что на любой строке и на любом столбце имеется ровно один закрашенный квадратик. Докажите, что каждый квадрат 1000×1000 (на этой доске) содержит хотя бы одну закрашенную клетку.

7. Для произвольных положительных действительных чисел a, b, c, удовлетворяющих равенству $a+b+c=1$, докажите следующее неравенство:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

8. Дан равнобедренный треугольник ABC, где $\angle ABC = 120^\circ + \alpha$ $(AB = BC)$. На стороне AB построен внешним образом равнобедренный треугольник ADB ($AD = DB$) и $\angle ADB = \alpha$. Найдите $\angle DCB$.