Областная олимпиада по математике, 2000 год, 11 класс

1. Для положительных чисел a, b, c верно равенство $abc = 1$. Докажите неравенство: $a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b} \leq 1$.

2. Множество X состоит из шести элементов. Каждое из множеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 — трехэлементные подмножества множества X. Докажите, что можно раскрасить элементы множества X в два цвета так, что не все элементы каждого из множеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 будут одинакового цвета.

3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки P и K — середины отрезков AO и BC соответственно. Известно, что $\angle CBA = 4\angle OPK$ и $\angle ACB = 6\angle OPK$. Найдите угол $\angle OPK$.

4. Основанием пирамиды служит правильный девятиугольник. Каждая из диагоналей основания и каждая из боковых сторон красятся в один из двух цветов красный или синий (стороны основания не закрашиваются). Докажите, что найдутся три закрашенных отрезка одинакового цвета, составляющие треугольник.

5. Найдите все пары (a, b) действительных чисел, удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 2^{a^4+b^2} + 2^{a^2+b^4} = 8, \\ a + b = 2. \end{cases}$$

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины A. Через точку D проводится прямая α, отличная от BC. На прямой α выбраны две точки E и F такие, что углы AEB и AFC — прямые. L — середина EF, M — середина BC. Найдите угол ALM.

7. На шахматной доске $n \times n$ расставлены $2n$ пешек (пешка ставится в центр клетки). Докажите, что найдутся четыре пешки, которые находятся в вершинах некоторого параллелограмма.

8. Найдите все функции $f : (1; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$ такие, что для всех действительных чисел $x > 1$ и $y > 1$ справедливо равенство

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy).$$