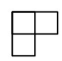
Областная олимпиада по математике, 2000 год, 10 класс

1. Докажите что для любого натурального n число

$$\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(4-\frac{2}{n}\right)$$

— является натуральным.

2. Дана функция $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ удовлетворяющая следующим условиям: а) $f(m+n)\geq f(m)+f(n)$; б) $f(1)>1$; в) $f(3000)<3002$. Найдите $f(2000)$.

3. Дана доска 9×9 покрашенная в шахматном порядке (черных клеток больше). Из этой доски произвольным образом удалили 9 белых клеток. Докажите что оставшуюся часть нельзя разбить на фигурки вида .

4. Основанием пирамиды служит правильный девятиугольник. Каждая из диагоналей основания и каждая из боковых сторон красятся в один из двух цветов красный или синий (стороны основания не закрашиваются). Докажите, что найдутся три закрашенных отрезка одинакового цвета, составляющие треугольник.

5. На доске записана тройка чисел $(a_1,a_2,a_3)=(3,4,12)$. За один шаг разрешается стереть любые два числа a_i, a_j $(i\neq j)$ и вместо них написать числа $0,!6a_i-0,!8a_j$ и $0,!6a_j+0,!8a_i$, (не обязательно в таком порядке). Можно ли за несколько шагов получить на доске тройку (2,8,10)?

6. Найдите все пары целых чисел $(m;n)$ такие, что

$$(m-n)^2=\frac{4mn}{(m+n-1)}.$$

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины A. Через точку D проводится прямая α, отличная от BC. На прямой α выбраны две точки E и F такие, что углы AEB и AFC — прямые. L — середина EF, M — середина BC. Найдите угол ALM.

8. На шахматной доске $n\times n$ расставлены $2n$ пешек (пешка ставится в центр клетки). Докажите, что найдутся четыре пешки, которые находятся в вершинах некоторого параллелограмма.