Областная олимпиада по математике, 1999 год, 9 класс

1. Два игрока играют на доске 1998×1998. Первоначально все клетки доски белые. За один ход игрок может: а) покрасить белую клетку в черный цвет, или б) если в каком-либо столбце или строке белых клеток больше чем черных, то все клетки того столбца или строки можно перекрасить в противоположный цвет. Игрок, после хода которого вся доска станет черной, выигрывает. Кто победит при правильной игре (начинающий или второй игрок)?

2. Докажите, что значение выражения $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{12}^2)a_1^2 a_2^2 \ldots a_{12}^2$ делится на 12 при любых целых a_1, a_2, ..., a_{12}.

3. В левом нижнем квадрате 19×19 доски 98×99 стоит 361 белая шашка, а в правом верхнем квадрате 19×19 той же доски стоит 361 черная шашка. За один ход разрешается переставить любую шашку на симметричное ей относительно любой другой шашки поле, если это поле свободно. Можно ли за конечное число ходов поменять местами черные шашки с белыми?

4. Треугольник ABC — правильный. Точка M лежит внутри $\angle ABC$, причем $\angle AMB = 30^\circ$. Пусть прямые AC и BM пересекаются в точке K. Найдите углы $\angle MAB$ и $\angle MCB$, если известно, что $\triangle MKC$ подобен $\triangle MCB$.

5. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ произвольным образом выбрана точка M. Пусть O_1 и O_2 центры окружностей, описанных около треугольников AMD и CMD, соответственно. Докажите, что AO_1 перпендикулярно CO_2.

6. Можно ли без наложений замостить доску размером 1998×1998 плитками вида буквы "Г" состоящие из четырёх клеток?

7. Каждый день в течение одного квартала (92 дня) авиакомпания выполняла по десять рейсов. Причем за сутки каждый самолет выполнял не более одного рейса. Известно, что среди рейсов любых двух дней имеется один и только один самолет, летавший в эти дни. Докажите, что имеется самолет, летавший во все дни квартала.

8. Докажите, что не существует натуральных чисел l, m, n, удовлетворяющих уравнению: $n^2 + m^3 = m^l$.