Областная олимпиада по математике, 1999 год, 11 класс

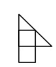
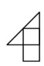
1. Докажите неравенство $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 1998^{1998} > (1998!)^{\frac{1999}{2}}$.

2. Пусть a_1 и a_2 произвольные цифры. Для каждого натурального n последнюю цифру числа $19a_{n+1} + 99a_n$ в его десятичной записи обозначим через a_{n+2}. Докажите, что число $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ — рациональное.

3. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношениям: $f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y$ и $f(0) = 0$.

4. Пусть ABC — остроугольный треугольник, H — его ортоцентр. Обозначим через M середину отрезка BH, а через N проекцию точки H на биссектрису внутреннего угла B. докажите, что прямая MN делит сторону AC пополам.

5. Найдите все вещественные значения a, такие что уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию.

6. Можно ли без наложения замостить доску размером 99×99 плитками вида  и  ?

7. В квадрате $ABCD$ расположена точка P таким образом, что $AP = 2\sqrt{3}$; $BP = \sqrt{2}$; $CP = 4$. Докажите, что $\angle APC = 120^\circ$.

8. Число 2211 представлено в виде суммы двадцати трех целых положительных чисел. Какое наименьшее возможное значение наименьшего общего кратного этих двадцати трех чисел?