Областная олимпиада по математике, 1999 год, 10 класс

1. Пусть d_1, d_2 — делители числа n $(d_1 \cdot d_2 \neq n)$. Докажите, что, если НОД $\left(d_1, \frac{n}{d_2}\right) =$ НОД $\left(d_2, \frac{n}{d_1}\right)$, то $d_1 = d_2$.

2. Дана таблица $(2k+1) \times (2k+1)$ в каждой клетке которой записано целое число. В каждый момент времени во все клетки записывается сумма чисел, стоящих в соседних клетках (клетки считаются соседними, если имеют общее ребро). Можно ли получить таблицу с нечетными числами, если первоначально среди них были и четные числа?

3. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие соотношению:

$$(x-27)P(3x) = 27(x-1)P(x).$$

4. Пусть O — центр вневписанной окружности ω треугольника ABC $(AB \neq AC)$. Окружность ω касается стороны BC в точке K, а с продолжениями сторон AC и AB в точках M и P соответственно. Определим точки: T — точка пересечения прямых AO и PM, H — вторая точка пересечения окружности ω и прямой AK Докажите, что точки K, T, O и H лежат на одной окружности.

5. Пусть функция $f(n)$ определена на всех натуральных n, а её значения могут быть целыми неотрицательными числами. Пусть f удовлетворяет следующим условиям: а) $f(mn) = f(m) + f(n)$ для всех натуральных m и n; б) $f(n) = 0$ для всех натуральных n, заканчивающихся на цифру 3 (Например, $0 = f(3) = f(13) = f(23) = \ldots$); с) $f(2030) = 0$; Докажите, что $f(n) = 0$ для всех натуральных n.

6. Пусть $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ многочлен с неотрицательными коэффициентами, имеющий n действительных корней. Покажите, что $P(1998) \geq 1999^n$.

7. В квадрате $ABCD$ расположена точка P таким образом, что $AP = 2\sqrt{3}$; $BP = \sqrt{2}$; $CP = 4$. Докажите, что $\angle APC = 120^\circ$.

8. Число 2401 представлено в виде суммы двадцати пяти целых положительных чисел. Какое наименьшее значение может иметь наименьшее общее кратное этих двадцати пяти чисел?