Задача №1. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^4 = b^4 + ab + c^3 = a + b + c$. Докажите, что $a = bc$.

Задача №2. Дано целое число $n > 1$. Доску $n \times n$ раскрасили шахматным образом в белый и черный цвет. Фигурой назовем любой непустой набор различных клеток доски. Фигуры F_1 и F_2 назовем подобными, если F_1 можно получить из F_2 с помощью поворота относительно центра доски на угол, кратный 90°, и параллельного переноса. (Любая фигура подобна самой себе.) Фигуру F назовем связной, если для любых клеток a, $b \in F$ найдется последовательность клеток $c_1, \ldots, c_m \in F$ такая, что $c_1 = a$, $c_m = b$, а также c_i и c_{i+1} имеют общую сторону для каждого $1 \leq i \leq m-1$. Найдите наибольшее возможное значение k такое, что для любой связной фигуры F, состоящей из k клеток, найдутся фигуры F_1, F_2 подобные F, что в F_1 белых клеток больше, чем черных, а в F_2 белых клеток меньше, чем черных.

Задача №3. В окружность ω с центром O вписан остроугольный треугольник ABC ($AB \neq AC$). Точка M — середина стороны BC. Касательная прямая к ω в точке A пересекает продолжение стороны BC в точке D. Окружность с центром в точке M и с радиусом MA пересекает продолжения сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Пусть X такая точка, что $BX \parallel KM$ и $CX \parallel LM$. Докажите, что точки X, D, O лежат на одной прямой.

Задача №4. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c хотя бы одно из чисел a^3b+1, b^3c+1, c^3a+1 не делится на $a^2+b^2+c^2$.

Задача №5. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$), в котором все углы больше 45°, проведена высота AD. Пусть ω_1 и ω_2 — окружности с диаметрами AC и AB соответственно. Биссектриса угла ADB вторично пересекает ω_1 в точке P, а биссектриса угла ADC вторично пересекает ω_2 в точке Q. Прямая AP вторично пересекает ω_2 в точке R. Докажите, что центр описанной окружности треугольника PQR лежит на прямой BC.

Задача №6. Целое число $m \geq 3$ и бесконечная последовательность натуральных чисел $(a_n)_{n \geq 1}$ при всех натуральных n удовлетворяют равенству

$$a_{n+2} = 2\sqrt{a_n^{m-1}a_{n+1}^m + a_{n-1}^m} - a_{n+1}.$$

Докажите, что $a_1 \leq 2^m$.