Задача №1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Окружность Ω проходит через точки A и B, и касается прямой AC. Пусть BE — диаметр Ω. Прямые BH и AH во второй раз пересекают Ω в точках K и L соответственно. Прямые EK и AB пересекаются в точке T. Докажите, что $\angle BDK = \angle BLT$.

Задача №2. Дано простое число $p \geq 3$ и натуральное число d. Докажите, что существует натуральное число n, взаимно простое с d, такое, что произведение

$$P = \prod_{1 \leq i < j < p} (i^n + j - j^n + i)$$

не делится на p^n.

Задача №3. $\mathbb{R}^+$ — множество положительных действительных чисел. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что при всех $x, y \in \mathbb{R}^+$ выполняется равенство

$$f\left(x + \frac{f(xy)}{x}\right) = f(xy) f\left(y + \frac{1}{y}\right).$$

Задача №4. Игроки A и B играют в следующую игру на координатной плоскости. Игрок A прячет орешек в одной из точек с целочисленными координатами, а игрок B пытается найти этот спрятанный орешек. За один ход B может выбрать три различных точки с целочисленными координатами, затем A говорит, лежат ли эти три точки вместе с точкой орешка на одной окружности или нет. Сможет ли B гарантированно найти орешек за конечное количество ходов?

Задача №5. Целое число $m \geq 3$ и бесконечная последовательность натуральных чисел $(a_n)_{n \geq 1}$ при всех натуральных n удовлетворяют равенству

$$a_{n+2} = 2\sqrt{a_n^{m-1} a_{n+1}^m + a_{n-1}^m} - a_{n+1}.$$

Докажите, что $a_1 \leq 2^m$.

Задача №6. Окружность ω с центром в точке I, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и AEF вторично пересекаются в точке K. Прямые EF и AK пересекаются в точке X и пересекают прямую BC в точках Y и Z соответственно. Касательные прямые к ω, отличные от BC, проходящие через точки Y и Z, касаются ω в точках P и Q соответственно. Пусть прямые AP и KQ пересекаются в точке R. Докажите, что если M — середина отрезка YZ, то $IR \perp XM$.