Математика пәні бойынша 2023 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі, Шымкент қ.

Жұмыс уақыты: 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

9-сынып, 2-күн

4. Оң нақты x және y сандары үшін $x^2y^2 + 2x^3y = 1$ теңдігі орындалады. $x + y$ қосындысының ең кіші мүмкін мәнін анықтаңыз.

5. $p^3 + q^3 + r^3 = p^2qr$ теңдеуін жай сандарда шешіңіз.

6. Теңбүйірлі емес сүйірбұрышты ABC үшбұрышының биіктіктері H нүктесінде қиылысады. BHC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберге H нүктесінде жүргізілген жанама түзу AB және AC түзулерін, сәйкесінше, Q және P нүктелерінде қияды. ABC және APQ үшбұрыштарының сырттай сызылған шеңберлері екінші рет K нүктесінде қиылысады. APQ үшбұрышына сырттай сызылған шеңберге A және K нүктелерінде жүргізілген жанамалар T нүктесінде қиылысады. TH түзуі BC кесіндісін қақ бөлетінін дәлелдеңіз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2023 года, г. Шымкент

Время работы: 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов

9 класс, 2 день

4. Пусть x и y положительные действительные числа такие, что $x^2y^2+2x^3y = 1$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $x + y$.

5. Решите уравнение в простых числах

$$p^3 + q^3 + r^3 = p^2qr.$$

6. Высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Касательная прямая в точке H к описанной окружности треугольника BHC пересекает прямые AB и AC в точках Q и P соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и APQ вторично пересекаются в точке K. Касательные в точках A и K к описанной окружности треугольника APQ пересекаются в точке T. Докажите, что прямая TH проходит через середину отрезка BC.

Математика пәні бойынша 2023 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі, Шымкент қ.

Жұмыс уақыты: 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

10-11-сынып, 2-күн

4. Жазықтықта ешқандай үшеуі бір түзудің бойында жатпайтын 2000 нүктеден тұратын G графы берілген. Олардың 1000-ы қара, ал қалған 1000-ы қызыл түске боялған. 100 қызыл нүкте дөңес 100-бұрыштың төбелері болатындай, ал қалған 1900 нүкте осы 100-бұрыштың ішінде жататындай 100 қызыл нүкте табылатыны белгілі. Қызыл нүктелерді қосатын кез келген кесінді қара нүктелерді қосатын ешбір кесіндімен қиылыспайтындай ұштары бір түсті бірнеше кесінділерді жүргізуге болатынын, және G-ның әрбір төбесінен сол түске боялған кез келген төбеге жете алатындай, бірнеше кесінді жүргізе алатынымызды дәлелдеңіз (графтың қабырғалары — бұл жүргізілген кесінділер).

5. a, b, m және $k \geq 2$ натурал сандары берілген.

$$\text{ЕҮОБ}\left(\varphi_m(n), \left[\sqrt[k]{an+b}\right]\right) = 1$$

болатындай шексіз көп натурал n сандарының табылатынын дәлелдеңіз. (Бұл жерде $\varphi_1(n) = \varphi(n)$ — Эйлер функциясы, ол 1-ден n-ге дейін неше сан n санымен өзара жай екенін көрсетеді, ал барлық $i \geq 1$ үшін $\varphi_{i+1}(n) = \varphi(\varphi_i(n))$. $[x]$ арқылы x санынан аспайтын ең үлкен бүтін сан белгіленген.)

6. Қабырғасы 3-ке тең дұрыс үшбұрыштың ішінде қабырғасы 1,061-ке тең және сүйір бұрышы 60°-қа тең екі ромб жатыр. Осы екі ромб бір-бірімен қиылысатынын дәлелдеңіз. (Ромбтың төбелері үшбұрыштың ішінде қатаң түрде орналасқан.)

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2023 года, г. Шымкент

Время работы: 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов

10-11 класс, 2 день

4. Дан граф G, вершинами которого являются 2000 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. 1000 из этих точек покрашено в черный цвет, а остальные 1000 в красный. Оказалось, что существуют 100 красных точек, которые образуют такой выпуклый 100-угольник, что все остальные 1900 точек лежат внутри этого 100-угольника. Докажите, что можно провести несколько отрезков с одноцветными концами так, чтобы любой отрезок, соединяющие красные точки не пересекался с любым отрезком, соединяющим черные точки, и при этом из любой вершины G можно было добраться до любой вершины того же цвета (ребра графа — это проведенные отрезки).

5. Даны натуральные числа a, b, m и k, где $k \geq 2$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n такие, что

$$\text{НОД}\left(\varphi_m(n), \left[\sqrt[k]{an+b}\right]\right) = 1$$

($\varphi_1(n) = \varphi(n)$ — функция Эйлера, т.е. количество целых чисел от 1 до n, которые взаимно просты с n, $\varphi_{i+1}(n) = \varphi(\varphi_i(n))$ при всех $i \geq 1$, а $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

6. Внутри правильного треугольника со стороной 3 находятся два ромба со сторонами 1,061 и с острыми углами 60°. Докажите, что эти два ромба пересекаются друг с другом. (Вершины ромба находятся строго внутри треугольника.)