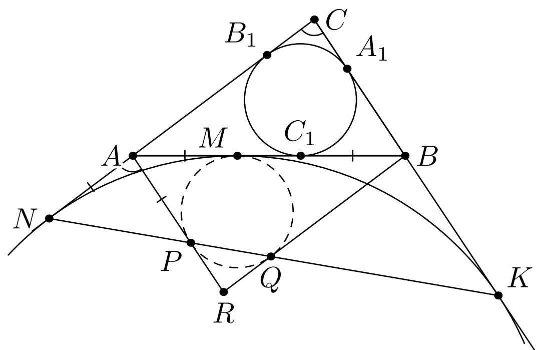
Решения задач 9 класса

9.1. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке M, а продолжений сторон AC и BC — в точках N и K соответственно. На отрезке NK выбраны точки P и Q так, что $AN = AP$ и $BK = BQ$. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника MPQ равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть прямые AP и BQ пересекаются в точке R. Так как $CN = CK$, то из условия $AN = AP$

следует, что равнобедренных треугольниках ANP и CNK есть общий угол ANP, поэтому они подобны по трём углам. Следовательно, $\angle NAP = \angle NCK$ или $AR \parallel CK$. Аналогично, $BR \parallel AC$. Поэтому $ACBR$ — параллелограмм. Следовательно, треугольник ABR центрально симметричен треугольнику BAC относительно середины стороны AB. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Также известным фактом является то, что точки M и C_1 также симметричны относительно середины AB. Поэтому из равенств $BA_1 = BC_1 = AM = AN = AP$ следует, что точки P и A_1 (аналогично, и точки Q и B_1) центрально симметричны относительно середины AB. Поэтому радиусы описанных окружностей треугольников MPQ и $C_1A_1B_1$ равны. Это и требовалось доказать.



9.2. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $a+b+c \geq 3$ и $a^2+b^2+c^2 = 2abc+1$. Докажите, что
$$a + b + c \leq 2\sqrt{abc} + 1.$$

Решение. Предположим, что хотя бы одно из чисел a, b, c меньше 1. БОО $a < 1$. По условию имеем,

что
$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = (ab - c)^2 \geq 0,$$
откуда $b \leq 1$. Аналогично $c \leq 1$. Тогда $a + b + c < 3$, что противоречит условию. Значит $a, b, c \geq 1$.

Нам достаточно показать, что
$$a + b + c - 1 \leqslant 2\sqrt{abc} \quad \Leftrightarrow \quad (a + b + c - 1)^2 \leqslant 4abc \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 2a - 2b - 2c + 1 \leqslant 2abc + (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \quad \Leftrightarrow$$
$$ab + bc + ac + 1 \leqslant abc + a + b + c \quad \Leftrightarrow$$
$$0 \leqslant (a - 1)(b - 1)(c - 1),$$
что верно, ч.т.д.

9.3. Дана клетчатая доска $2n \times 2n$. Самат закрашивает некоторые клетки в синий или в красный цвет. Он должен раскрасить ровно k клеток. Фархат раскрашивает все остальные клетки доски в синий или красный цвет так, чтобы итоговая доска удовлетворяла следующим условиям:

- в каждой строке и в каждом столбце одинаковое количество синих и красных клеток;
- в каждой строке и в каждом столбце нет трех последовательных клеток одного цвета;
- любые две строки различны и любые два столбца различны. (Если у строк r_1 и r_2 есть клетки разного цвета, находящиеся в одном столбце, то эти строки считаются различными. Аналогично и для столбцов.)

Найдите наименьшее возможное значение k (в зависимости от n), при котором Фархат может покрасить доску не более чем одним способом независимо от раскраски Самата. (Если клетка уже покрашена в синий или в красный цвет, то его больше нельзя перекрашивать.)
Ответ. $k = 4n^2 - 3$.

Решение. Заметим, что нет смысла рассматривать раскраски, из которых нельзя получить нужную

конфигурацию, так как в этом случае ответом будет число 0. Поэтому будем смотреть только те раскраски, из которых можно получить нужную нам конфигурацию. Обозначим данные три условия через (i), (ii), (iii).

При $k = 4n^2 - 3$ заметим, что существует строка или столбец содержащий ровно одну из 3 незакрашенных клеток. Тогда по первому условию цвет этой клетки однозначно определяется. Закрасим ее в этот цвет. Аналогично для двух оставшихся клеток можно найти строку или столбец, который содержит ровно одну из этих незакрашенных клеток, также по первому усолвию они однозначно определяются. Значит доску можно закрасить не более чем одним способом.

При $k = 4n^2 - 4$ приведем пример раскраски $4n^2 - 4$ клеток, при котором остальные 4 незакрашенные клетки можно будет закрасить двумя различными способами. При $n = 1$ или $n = 2$, игрок может закрасить как на рисунке ниже и оставшиеся 4 клетки можно закрасить шахматной раскраской двумя способами. Не трудно понять, почему эти раскраски удовлетворяют всем условиям. Пусть теперь $n > 2$. Пронумеруем диагонали числами от 1 до $4n-1$, где в i-й диагонали находится все клетки с координатами (r, c), что $r + c = i + 1$ (нумерация строк идет сверху вниз, а столбцов слева направо). Рассмотрим два случая.

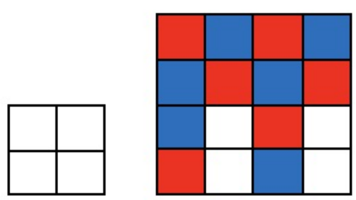


Рис. 1: Примеры для $n = 1$ и $n = 2$

1) n — нечетно.

Покрасим в красный цвет все клетки диагоналей с номерами $1, 3, \ldots, 2n-3, 2n, 2n+3, 2n+5, \ldots, 4n-1$, в синий цвет $2, 4, \ldots, 2n-2, 2n+2, 2n+4, \ldots, 4n-2$, а диагонали $2n-1, 2n+1$ покрасим в шахматном порядке начиная с синего цвета (смотрите на рисунок). Если найдутся три последовательных клетов одного цвета, то по построению следует, что все эти клетки должны лежать в разных диагоналях, в номерах в диапазоне $[2n-2, 2n+2]$, что невозможно, так как $2n-2, 2n+2$-ые диагонали синего цвета, а $2n$-й диагональ красного. Условие (ii) выполняется.

Рассмотрим строку r, и пусть $i = [(r+1)/2]$. В столбцах с номерами от 1 до $2n - 2i$ цвета клеток чередуются, от $2n - 2i + 3$ до $2n$ цвета клеток чередуются, а также в клетках $2n - 2i + 1$ и $2n - 2i + 2$ цвета клеток разные. Аналогично и для столбцов. Условие (i) выполняется.

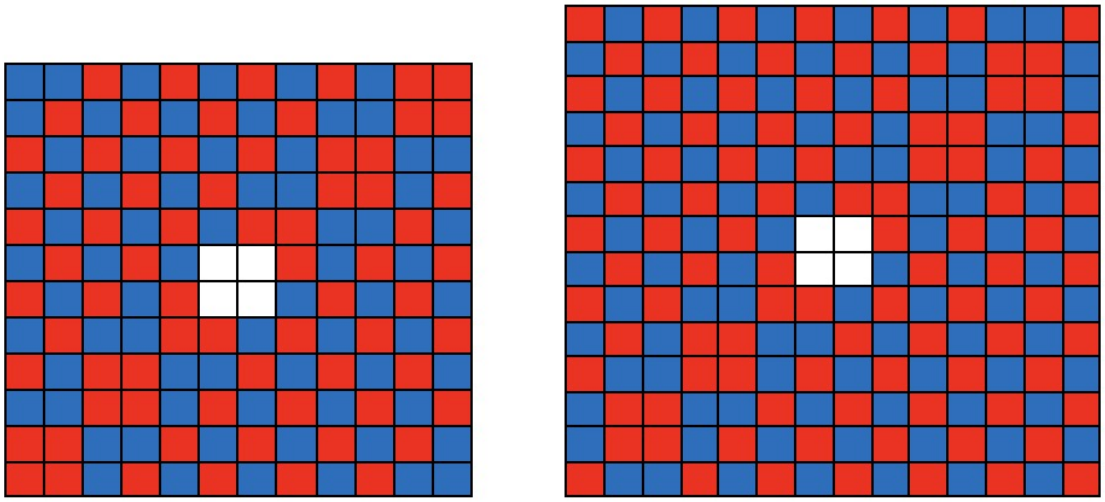


Рис. 2: Примеры для $n = 6$ и $n = 7$

Первая и последняя строка разные, так как отличается цвет в 3-м столбце, также в этих строках нет двух подряд клеток красного цвета. Заметим, что в r-й строке ($1 < r < 2n$) есть ровно одна пара подряд идущих клеток красного цвета, причем в $2n - 2[r/2]$ и $2n - 2[r/2] + 1$ столбцах. Следовательно, если какие-то две строки оказались равны, то они имеют номера $2k$ и $2k + 1$, что невозможно так как эти строки различаются в первом или в последнем столбце. Аналогичное утверждение верно и для столбцов. Условие (iii) выполняется.

Теперь из этой конфигураций стерем цвета клеток центрального квадрата 2×2. Докажем, что этот квадрат можно закрасить двумя способами, чтобы выполнялось условие задачи. Будем красить шахматной раскраской. Мы доказали, что если раскрасить левую нижнюю клетку этого квадрата 2×2 в красный цвет, то эта раскраска нам подходит. Теперь рассмотрим раскраску, в котором эта клетка синего цвета. Условие (i) остается верным. Центральные две строки полностью будут раскрашены в шахматном порядке, причем цвета первой клетки у них различны, следовательно условие (ii) остается верным. Условие (iii) также остается верным, так как у всех других строк есть подряд идущие клетки одного цвета.

2) n — четно.

Покрасим в красный цвет все клетки диагоналей с номерами $3, 5, \ldots, 2n-3, 2n, 2n+3, 2n+5, \ldots, 4n-3$, в синий цвет $1, 2, 4, \ldots, 2n-2, 2n+2, 2n+4, \ldots, 4n-2, 4n-1$, а диагонали $2n-1, 2n+1$ покрасим в шахматном порядке начиная с красного цвета (смотрите на рисунок). Решение аналогично как и для первого случая.

9.4. Пусть x и y положительные действительные числа такие, что $x^2y^2 + 2x^3y = 1$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $x + y$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

Решение. По неравенству Коши для чисел x^2 и $y^2 + 2xy$ получим, что

$$1 = x^2y^2 + 2x^3y = x^2(y^2 + 2xy) \leqslant \left(\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x+y)^4,$$

откуда $x + y \geqslant \sqrt{2}$. При $x = 1$ и $y = \sqrt{2} - 1$ получим, что $x^2y^2 + 2x^3y = 1$ и $x + y = \sqrt{2}$.

9.5. Решите уравнение в простых числах

$$p^3+q^3+r^3=p^2qr.$$

Ответ. $(p,q,r)=(3,3,3)$.

Решение. Пусть $p\le 3$. Тогда по неравенству Коши $3pqr\le p^3+q^3+r^3=p^2qr\le 3pqr$. Причем равенство достигается только при $p=q=r=3$, что удовлетворяет условию задачи. Пусть теперь $p>3$.

Если $r=3$, то $p^3+q^3+27=3p^2q \implies 3\mid p+q \implies p^2-pq+q^2\equiv 3q^2\equiv 0 \pmod 3 \implies 9\mid p^3+q^3 \implies 9\mid 3p^2q \implies q=3 \implies p=3$. Аналогично, если $q=3$, то получим, что $p=r=3$. Пусть теперь $q,r\ne 3$. Если $q=p$, то $p\mid r^3 \implies p=r$. В этом случае $3p^3=p^3+q^3+r^3=p^2qr=p^4 \implies p=q=r=3$, что неверно. Аналогично $p\ne r$, т.е. $(3p,qr)=1$.

Заметим, что $p^2\mid p^2(qr-p)=q^3+r^3=(q+r)(q^2-qr+r^2)$. Значит $p^2\mid q+r$ или $p\mid(q^2-qr+r^2)$.

1) $p^2\mid q+r$. Тогда $q+r\ge p^2$. По неравенству Коши $q^3+r^3=(q+r)(q^2-qr+r^2)\ge(q+r)qr$, следовательно $p^3+q^3+r^3>(q+r)qr\ge p^2qr$, что неверно.

2) $p\mid(q^2-qr+r^2)$. Рассмотрим два случая.

a) $p\equiv 1 \pmod 3$. Так как $x^3\equiv x \pmod 3$ и $p^2\equiv 1 \pmod 3$, то из $p^3+q^3+r^3=p^2qr$ следует, что

$$p+q+r\equiv qr \pmod 3 \Longrightarrow$$

$$1+q+r\equiv qr \pmod 3 \Longrightarrow$$

$$(q-1)(r-1)\equiv 2 \pmod 3. \tag{1}$$

Перебрав $q,r\equiv 1,2 \pmod 3$ получим, что (1) не выполняется.

b) $p\equiv 2 \pmod 3$. Так как $p>2$, то число $(p-2)/3$ — нечетно. Из $p\mid(q^2-qr+r^2)$ следует, что

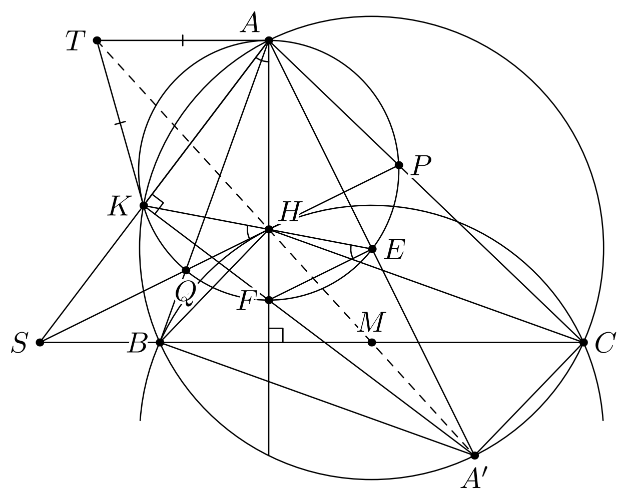
$$q^3\equiv -r^3 \pmod p \quad\Longrightarrow (q^3)^{\frac{p-2}{3}}\equiv(-r^3)^{\frac{p-2}{3}} \pmod p \quad\Longrightarrow$$

$$q^{p-2}\equiv -r^{p-2} \pmod p. \tag{2}$$

Умножив обе части (2) на qr и используя Малую теорему Ферма получим, что $r\equiv -q \pmod p$. Тогда $0\equiv q^2-qr+r^2\equiv 3r^2 \pmod p$, что неверно.

9.6. Высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Касательная прямая в точке H к описанной окружности треугольника BHC пересекает прямые AB и AC в точках Q и P соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и APQ вторично пересекаются в точке K. Касательные в точках A и K к описанной окружности треугольника APQ пересекаются в точке T. Докажите, что прямая TH проходит через середину отрезка BC.

Решение. Через (XYZ) обозначим описанную окружность треугольника XYZ. БОО $AB<AC$. Через A' отметим диаметрально противоположную точку к A окружности (ABC). Пусть прямые AH и KH пересекают (APQ) вторично в точках F и E соответственно.



Утверждение 1. Прямые AK, PQ и BC пересекаются в одной точке.

Доказательство. По свойству касательной $\angle HBC = \angle CHP$. Поскольку

$$\angle QBC = \angle QBH + \angle HBC = 90^\circ - \angle BAC + CHP = \angle HCP + \angle CHP = 180^\circ - \angle HPC = 180^\circ - \angle QPC,$$

то четырехугольник $BQPC$ вписанный. Известно, что радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке. Тогда прямые AK, PQ и BC пересекаются в одной точке (назовем S), так как являются радикальными осями окружностей $(ABC), (APQ)$ и $(BQPC)$.

Утверждение 2. Прямые KF и HM пересекаются в точке A'.

Доказательство. По свойству вписанного угла и касательной получим, что

$$\angle CSA = \angle CBA - \angle SAB = \angle APQ - \angle KPQ = \angle APK = \angle TAK,$$

откуда $TA \parallel BC$. Поскольку $AF \perp BC$, то прямые AF и AT также перпендикулярны. Из последнего следует, что центр окружности (APQ) лежит на AF. Значит $\angle AKF = 90^\circ = \angle AKA'$, откуда прямая KF проходит через точку A'.

Так, как BH и $A'C$ перпендикулярны к AC, то $BH \parallel A'C$. Аналогично $CH \parallel A'B$, откуда $BHCA'$ — параллелограмм, поэтому HA' проходит через точку M, что и завершает доказательство утверждения.

Утверждение 3. Точки A, E и A' лежат на одной прямой.

Доказательство. Так как SH касается (BHC), имеем равенство $SH^2 = SB \cdot SC$. Из вписанности $ABCK$ следует, что $SB \cdot SC = SK \cdot SA$. Значит $SH^2 = SK \cdot SA$. Тогда SH касается (AKH), следовательно $\angle SAH = \angle KHS$. Но поскольку $\angle KAH = \angle KAF = \angle KEF$, то $EF \parallel PQ$. Следовательно $QFEP$ — равнобокая трапеция, откуда $\angle QAF = \angle PAE$.

Так как $BHCA'$ — параллелограмм и из свойств вписанного угла получим, что

$$\angle QAF = \angle BAH = \angle HCB = \angle CBA' = \angle CAA' = \angle PAA'.$$

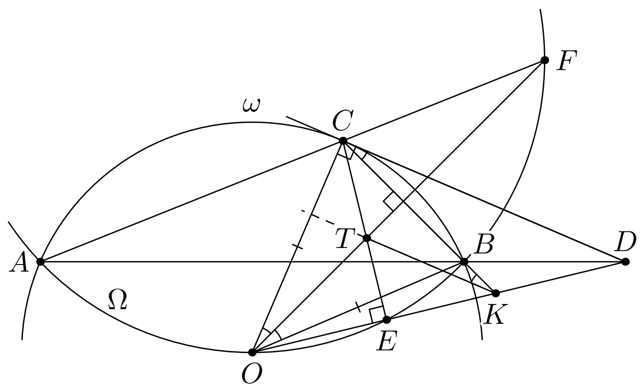
Значит $\angle PAA' = \angle QAF = \angle PAE$, откуда точки A, E и A' лежат на одной прямой.

Завершение. По теореме Паскаля к точкам $KKF\ AAE$ выходит, что точки T, H и A' лежат на одной прямой. Так как точки H, M и A' лежат на одной прямой, то и точки T, H и M должны лежать на одной прямой.

Решения задач 10-11 классов

10-11.1. В окружность ω с центром O вписан такой треугольник ABC, в котором $\angle C > 90^\circ$ и $AC > BC$. Касательная прямая к ω в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AOB. Прямые OD и AC повторно пересекают Ω в точках E и F соответственно. Прямые OF и CE пересекаются в точке T, а прямые OD и BC — в точке K. Докажите, что точки O, T, B, K лежат на одной окружности.

Решение. Заметим, что треугольник DCO является прямоугольным ($CO \perp CD$) и выполнено равенство $DC^2 = DB \cdot DA = DE \cdot DO$ (по свойству касательной и степени точки) которое можно переписать как $DC/DE = DO/CD$. Следовательно, треугольники DEC и DCO подобны по второму признаку, откуда $\angle CED = \angle OCD = 90^\circ$. Также несложно заметить, что прямая OF является серединным перпендикуляром отрезка BC, так как треугольник BOC является равнобедренным и $OF \perp BC$ (последнее верно в виду того, что $\angle BOF = \angle BAF = \angle BAC = \angle BOC/2$, то есть OF — биссектриса угла BOC). Следовательно, точка T является точкой пересечения высот треугольника COK. Как следствие, $KT \perp CO$. Но из последнего также следует параллельность $TK \parallel CD$. Поэтому $\angle TKB = \angle BCD = \angle COF = \angle FOB = \angle TOB$, то есть $\angle TKB = \angle TOB$. Этого условия достаточно для того, чтобы точки O, T, B, K лежали на одной окружности.



10-11.2. Дано целое число $n > 100$. Целые числа от 1 до $4n$ разбиты на n групп, по 4 числа в каждой. Докажите, что найдутся не менее $\dfrac{(n-6)^2}{2}$ четверок (a, b, c, d) целых чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $1 \le a < b < c < d \le 4n$;

(ii) числа a, b, c, d лежат в попарно разных группах;

(iii) $c - b \le |ad - bc| \le d - a$.

Решение. Заметим, что при $y > x + 1$ числа $a = x, b = x + 1, c = y, d = y + 1$ удовлетворяют условиям *(i)* и *(iii)*, так как $c - b = y - x - 1, bc - ad = (x + 1)y - (y + 1)x = y - x, d - a = y - x + 1$. Тогда достаточно доказать, что найдется не меньше $\dfrac{(n-6)^2}{2}$ пар (x, y), что числа $x, x + 1, y, y + 1$ лежат в разных группах. Пронумеруем группы числами от 1 до n. Построим граф на n вершинах, где вершины соответствуют группам. Для каждого числа x обозначим через s_x номер группы, в которой лежит x. Между вершинами u и v проведем ребро, если найдутся числа x, y такие, что $s_x = u, s_y = v, |x - y| = 1$. Заметим, что получившийся граф связный. Действительно рассмотрим любые две вершины u, v и рассмотрим произвольные числа x, y, для которых $s_x = u, s_y = v$. БОО $x < y$. Заметим, что из вершины s_x достижима вершина s_{x+1}, так как если $s_x = s_{x+1}$, то эта одна и та же вершина, а в противном случае по построению графа между ними есть ребро. Отсюда получим, что из s_{x+1} достижима $s_{x+2}, \ldots$, из s_{y-1} достижима s_y, т.е. из s_x достижима s_y.

Удалим некоторые ребра графа так, чтобы получилось остовное дерево. Пусть S количество пар ребер (e_1, e_2) такие, что все четыре конца этих ребер различны. Докажем, что $S \geq \frac{(n-6)^2}{2}$. В этом случае мы решим задачу, так как каждой такой паре ребер соответствует хотя бы одна пара (x, y) такая, что числа $x, x+1, y, y+1$ лежат в разных группах. Пусть теперь в этом графе степень i-й вершины равна d_i. Так как это дерево, то $d_1 + \cdots + d_n = 2n-2$. Заметим, что $d_i \leq 8$, так как для каждого числа x из i-й группы эта вершина может быть соединена только с группами, в которых находится числа $x-1$ и $x+1$.

Сначала посчитаем количество пар ребер (e_1, e_2) таких, что у них совпадает один конец (назовем эту вершину плохим). Количество пар ребер, в котором вершина i плохая равно $\binom{d_i}{2}$. Так как всего ребер в этом графе $n-1$, то

$$S = \binom{n-1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2 - \sum_{i=1}^n d_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i}{2} = \frac{n^2 - n - \sum_{i=1}^n d_i^2}{2}. \qquad (*)$$

Лемма. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ и $x_1 + \cdots + x_n = 2n-2$. Тогда $T = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 10n + 45$.

Доказательство: Так как к-во таких последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$ конечно, то у T существует максимум. Рассмотрим этот максимум. Предположим, что найдутся индексы i, j такие, что $2 \leq x_i \leq x_j \leq 7$. Тогда если заменить (x_i, x_j) на $(x_i - 1, x_j + 1)$, то сумма не меняется, а сумма квадратов увеличится $((x_i-1)^2 + (x_j+1)^2 - x_i^2 - x_j^2 = 2(x_j - x_i + 1) > 0)$, противоречие. Значит среди $x_1, \ldots, x_n$ есть k чисел равных 8, $n-k-1$ чисел равных 1, и число r $(1 \leq r \leq 8)$.

$$2n - 2 = x_1 + \cdots + x_n = 8k + (n-k-1) + r \geq 7k + n \Longrightarrow k \leq \frac{n-2}{7}.$$

Следовательно

$$T = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 64k + (n-k-1) + r^2 \leq 9(n-2) + n - 1 + 8^2 = 10n + 45.$$

Из (*) и леммы следует, что

$$S \geq \frac{n^2 - 11n - 45}{2} > \frac{(n-6)^2}{2},$$

где последнее неравенство верно, так как $n > 100$.

10-11.3. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $\max\left(\frac{a(b+c)}{a^2+bc}, \frac{b(c+a)}{b^2+ca}, \frac{c(a+b)}{c^2+ab}\right) \leq \frac{5}{2}$. Докажите неравенство

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \leq 3.$$

Решение. Без ограничения общности положим $a \geqslant b \geqslant c$. Достаточно показать, что

$$\frac{ba+bc}{b^2+ac} - 1 \leqslant 1 - \frac{ab+ac}{a^2+bc} + 1 - \frac{ca+cb}{c^2+ab} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-b)(b-c)}{b^2+ac} \leqslant \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{(a-c)(b-c)}{c^2+ab}. \qquad (1)$$

Если $a = b$ или $b = c$, то (1) верно, поскольку каждое слагаемое в правой части (1) неотрицательна. Теперь будем считать, что $a > b > c$. Тогда (1) эквивалентно:

$$\frac{1}{(a-c)(b^2+ac)} \leqslant \frac{1}{(b-c)(a^2+bc)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+ab)}. \qquad (2)$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\frac{1^2}{(b-c)(a^2+bc)}+\frac{1^2}{(a-b)(c^2+ab)} \geqslant \frac{(1+1)^2}{(b-c)(a^2+bc)+(a-b)(c^2+ab)} = \frac{4}{(a-c)(2ab+2bc-b^2-ac)}. \quad (3)$$

Поэтому достаточно показать, что

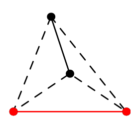
$$\frac{4}{(a-c)(2ab+2bc-b^2-ac)} \geqslant \frac{1}{(a-c)(b^2+ac)} \quad \Leftrightarrow$$

$$5b^2+5ac \geqslant 2(ab+bc) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \geqslant \frac{b(c+a)}{b^2+ac},$$

что верно по условию задачи.

10-11.4. Дан граф G, вершинами которого являются 2000 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. 1000 из этих точек покрашено в черный цвет, а остальные 1000 в красный. Оказалось, что существуют 100 красных точек, которые образуют такой выпуклый 100-угольник, что все остальные 1900 точек лежат внутри этого 100-угольника. Докажите, что можно провести несколько отрезков с одноцветными концами так, чтобы любой отрезок, соединяющие красные точки не пересекался с любым отрезком, соединяющим черные точки, и при этом из любой вершины G можно было добраться до любой вершины того же цвета (ребра графа — это проведенные отрезки).

Решение. Назовем треугольник 2Ч, если в нем две вершины черного цвета (соединенные ребром) и одна красного. Аналогично 2К, если две вершины красного цвета (соединенные ребром) и одна черного цвета.



Определим операцию $\bigoplus$ над треугольником 2Ч или 2К следующим образом:

- БОО рассмотрим треугольник 2К.

- Если внутри этого треугольника нету черных точек, то соединим все красные точки внутри треугольника с одним из красных вершин 2К и на этом закончим операцию. Обратите внимание, что новые красные точки будут соединены как минимум с одной предыдущей красной точкой (для связности красных точек).

- Если есть хотя бы одна черная точка внутри 2К, то возьмем любую из них и соединим ее с черной вершиной 2К. Заметьте, что эта черная точка соединена с предыдущей черной вершиной треугольника 2К (для связности черных точек). Потом разобъем треугольник на три части как показано на рисунке выше. Таким образом, 2К разбивается на два 2Ч и одну 2К и дальше делаем $\bigoplus$ на каждые получившиеся части.

Поскольку любой треугольник 2Ч или 2К содержит только конечное количество точек внутри, операция в какой-то момент закончится.

Возьмем изначальный граф и соединим ребром все соседние вершины выпуклой оболочки. Затем берем любую черную точку внутри выпуклого 100-угольника и разобьем граф на 100 треугольников вида 2K, и исполним $\bigoplus$ для каждого из них. Из построения можно понять, что новые найденные точки внутри треугольников имеют ребро хотя бы с одной предыдущей вершиной того же цвета. Из этого можно сделать вывод о связности красных и черных точек. Кроме того, никакие два разноцветных ребра не пересекаются, поскольку мы выполнили триангуляцию, которая не допускает пересечения каких-либо отрезков (два отрезка могут пересекаться только, если у них есть общая вершина, но тогда все концы этих двух отрезков одного цвета).

10-11.5. Даны натуральные числа a, b, m и k, где $k \geq 2$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n такие, что

$$\text{НОД}\left(\varphi_m(n), \left[\sqrt[k]{an+b}\right]\right) = 1$$

($\varphi_1(n) = \varphi(n)$ — функция Эйлера, т.е. количество целых чисел от 1 до n, которые взаимно просты с n, $\varphi_{i+1}(n) = \varphi(\varphi_i(n))$ при всех $i \geq 1$, а $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Решение. Докажем, что существует бесконечно много удовлетворяющих условию n в виде 2^{kt}, где

$t \in N$. Заметим, что можно считать, что a не является точной k-й степенью натурального числа, так как в противном случае вместо a будем использовать число $2a$ (которая не является точной k-й степенью), а вместо n будем ставить числа вида 2^{kt+1}. Так как $\varphi(1) = 1, \varphi(2^l) = 2^{l-1}$, тогда $\varphi_m(2^{kt})$ — степень двойки.

От противного, пусть найдется $M \in N$, что $x_t = [\sqrt[k]{a \cdot 2^{kt} + b}]$ — четно при всех $t \geq M$. Понятно, что последовательность (x_t) неубывающая и неограниченная. Пусть $K \in N$ такое число, что $K \geq M$ и $x_K > b \cdot 2^k$. По предположению x_t — четно при всех $t \geq K$. По свойству целой части

$$x_t^k \leq a \cdot 2^{kt} + b < (x_t+1)^k \implies \quad 1 \leq a\left(\frac{2^t}{x_t}\right)^k + y_t < 1 + z_t \qquad (1),$$

где $y_t = \frac{b}{x_t^k} \to 0$ (предел) и $z_t = \left(1 + \frac{1}{x_t}\right)^k - 1 \to 1^k - 1 = 0$. Из (1) следует, что

$$a \cdot 2^{k(t+1)} + b < 2^k(a \cdot 2^{kt} + b) < (2x_t + 2)^k \qquad (2),$$

$$a \cdot 2^{k(t+1)} + b \geq 2^k(x_t^k - b) + b = ((2x_t - 1) + 1)^k - 2^k b + b > (2x_t - 1)^k + 2x_t - 1 - 2^k b + b > (2x_t - 1)^k \quad (3),$$

где в (3) использовали бином Ньютона.

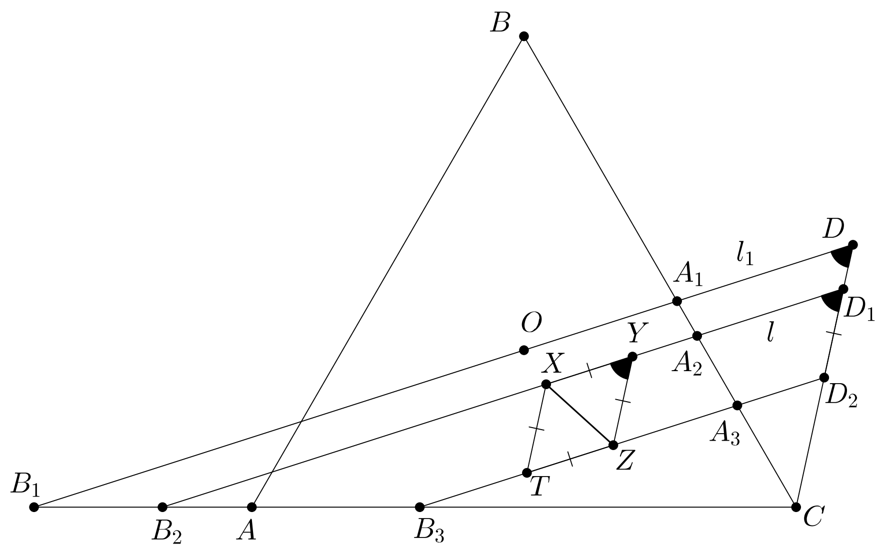
Из (2) и (3) следует, что $x_{t+1} < 2x_t + 2$ и $x_{t+1} \geq 2x_t - 1$, но так как x_t — четно, то $x_{t+1} = 2x_t$. Значит $\frac{2^{t+1}}{x_{t+1}} = \frac{2^t}{x_t}$, откуда при всех $t \geq K$ число $\frac{2^t}{x_t} = \frac{2^K}{x_K} = c$ — положительная рациональная константа. Тогда из (1) следует, что при всех $t \geq K$ выполнено

$$1 \leq a \cdot c^k + y_t < 1 + z_t \qquad (4).$$

Так как a не является точной k-й степенью, то число $s = a \cdot c^k \neq 1$. Если $s < 1$, т.е. $s = 1 - \varepsilon$, то из (4) следует, что $y_t \geq \varepsilon$ при всех $t \geq K$, что неверно, так как $y_t \to 0$. Если же $s > 1$, т.е. $s = 1 + \varepsilon$, то из (4) следует, что $z_t > \varepsilon$ при всех $t \geq K$, что также неверно из-за того, что $z_t \to 0$, противоречие.

10-11.6. Внутри правильного треугольника со стороной 3 находятся два ромба со сторонами 1,061 и с острыми углами 60°. Докажите, что эти два ромба пересекаются друг с другом. (Вершины ромба находятся строго внутри треугольника.)

Решение. Докажем, что если ромб $XYZT$ со стороной $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ находится внутри правильного треугольника ABC со стороной 3, то центр O треугольника ABC находится в ромбе. Из утверждения легко следует, что любые два ромба со сторонами $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ внутри треугольника пересекаются друг с другом.



От противного, предположим, что ромб не содержит O. Тогда существует прямая l содержащую одну из сторон ромба, скажем XY, такая, что O и ромб находятся по разные стороны от l, причем скажем, что XY ближе к O чем ZT. Проведем прямую $l_1 \parallel l$ проходящую через O. Рассмотрим два случая:

1) l параллельна одной из сторон $\triangle ABC$. БОО $l \parallel AB$.

Пусть $l_1 \cap CA = B_3, l_1 \cap CB = A_3$, $XY \cap CB = A_2$, $XY \cap CA = B_2$, $ZT \cap CB = A_1, ZT \cap CA = B_1$, h_1, h_2 — длины высот $\triangle TXY, \triangle CA_2, B_2$, проведенные из вершин T, C соответственно.

a) $XYZT$ находится внутри $\triangle CA_3B_3$. $A_2B_2 \le A_3B_3 = 2, A_1B_1 \ge TZ = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $h_1 = \frac{3\sqrt{6}}{8}$, $h_2 < \sqrt{3}$. Тогда

$$\frac{3\sqrt{2}}{8} < \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = 1 - \frac{h_1}{h_2} < 1 - \frac{3\sqrt{2}}{8},$$

что неверно.

b) $XYZT$ находится внутри BA_3B_3A. Опустим перпендикуляр A_3H на AB. Тогда

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = A_3H \ge h_1 = \frac{3\sqrt{6}}{8},$$

что неверно.

2) БОО l пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC.

Пусть $l_1 \cap BC = A_1$, $l_1 \cap AC = B_1$, $l \cap BC = A_2$, $l \cap AC = B_2$, $ZT \cap BC = A_3$, $ZT \cap AC = B_3$, $CA_1 = a$, $CB_1 = b$. Заметим, что $\angle B_1A_1C = 120^\circ - \angle CB_1A_1 > 60^\circ$. Выберем такую точку D на луче B_1A_1, что $\angle CDA_1 = 60^\circ$.

Через $S(XYZ)$ обозначим площадь треугольника XYZ. Заметим, что $CO = \sqrt{3}, \angle B_1CO = \angle A_1CO = 30^\circ$ и $S(CA_1B_1) = S(COA_1) + S(COB_1)$. Следовательно, $\frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{1}{2}B_1C \cdot A_1C \cdot \sin 60^\circ =$

$\frac{1}{2}A_1C \cdot OC \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2}B_1C \cdot OC \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b) \implies ab = a+b$. Пусть отрезок CD пересекает прямые l и ZT в точках D_1 и D_2, соответственно. Заметим, что $S(CA_1B_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot CD \cdot \sin 60^\circ \implies$

$CD = \frac{ab}{A_1B_1}$ и

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{A_1B_1} \leqslant \frac{A_3B_3}{A_1B_1} = \frac{CD_2}{CD} < \frac{CD - D_1D_2}{CD} = \frac{CD - \frac{3\sqrt{2}}{4}}{CD}.$$

Также по теореме косинусов $A_1B_1^2 = a^2 + b^2 - ab$. Имеем

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}(CD + A_1B_1) < CD \cdot A_1B_1 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}(ab + A_1B_1^2) < ab \cdot A_1B_1 \implies \frac{9}{8}(a^2+b^2)^2 < a^2b^2(a^2+b^2-ab)$$

$$\frac{9}{8}(a^2+b^2)^2 < a^2b^2(a^2+b^2-ab) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{9}{8}((a+b)^2 - 2ab)^2 < a^2b^2((a+b)^2 - 3ab) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{9}{8}((ab)^2 - 2ab)^2 < a^2b^2((ab)^2 - 3ab) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{9}{8}(ab-2)^2 < (ab)^2 - 3ab \quad \Longrightarrow$$

$$9(ab)^2 - 36ab + 36 < 8(ab)^2 - 24ab \quad \Longrightarrow$$

$$(ab-6)^2 < 0, \quad \text{противоречие.}$$

Заметим, что $1,061^2 \cdot 8 = 9,005768 > 9$, поэтому $1.061 > \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Значит данные два ромба пересекаются, так как имеют общую точку O.

Комментарий. На самом деле, внутри правильного треугольника со стороной 3 можно разместить два непересекающихся ромба со сторонами больше 1 и с острыми углами 60°. Ниже приведен пример, где сторона ромба равна 1, и очевидно, что можно добавить маленький $\varepsilon > 0$ к сторонам ромба, чтобы они также не пересекались.