Математика пәні бойынша 2023 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі, Шымкент қ.

Жұмыс уақыты: 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

9-сынып, 1-күн

1. ABC үшбұрышының іштейсырт сызылған шеңбері AB қабырғасын M, ал AC және BC қабырғаларының созындыларын, сәйкесінше, N және K нүктелерінде жанайды. NK кесіндісінде P және Q нүктелері $AN = AP$ және $BK = BQ$ болатындай алынған. MPQ үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең екенін дәлелдеңіз.

2. Оң нақты a, b, c сандары үшін $a + b + c \geq 3$ теңсіздігі мен $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ теңдігі орындалады. $a + b + c \leq 2\sqrt{abc} + 1$ теңсіздігін дәлелдеңіз.

3. Өлшемі $2n \times 2n$ ұяшықты тақта берілген. Самат тақтаның кейбір ұяшықтарын көк немесе қызыл түске бояйды. Ол жалпы дәл k ұяшықты бояу керек. Содан кейін Фархат қалған барлық боялмаған ұяшықтарды көк немесе қызыл түске келесі шарттар орындалатындай бояйды:

- әр қатарда және әр бағанда көк және қызыл ұяшықтар саны тең;
- ешқандай қатарда және ешқандай бағанда қатар келген бір түсті үш ұяшық жоқ;
- кез келген екі қатар әртүрлі және кез келген екі баған әртүрлі. (Егер r_1 және r_2 қатарларының бір бағанда жататын әртүрлі түсті екі ұяшығы табылса, ондай r_1 және r_2 қатарларын әртүрлі деп есептейміз. Дәл сол сияқты баған үшін әртүрлі бағандарды анықтаймыз.)

Фархат Саматтың қалай бояғанына қарамастан тақтаны ең көп дегенде бір әдіспен ғана бояй алатындай n-ге тәуелді ең кіші мүмкін k санын табыңыз. (Ұяшықты бірінші рет бояғаннан кейін үстінен тағы бояуға болмайды.)

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2023 года, г. Шымкент

Время работы: 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов

9 класс, 1 день

1. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке M, а продолжений сторон AC и BC — в точках N и K соответственно. На отрезке NK выбраны точки P и Q так, что $AN = AP$ и $BK = BQ$. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника MPQ равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

2. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $a + b + c \geq 3$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$. Докажите, что

$$a + b + c \leq 2\sqrt{abc} + 1.$$

3. Дана клетчатая доска $2n \times 2n$. Самат закрашивает некоторые клетки в синий или в красный цвет. Он должен раскрасить ровно k клеток. Фархат раскрашивает все остальные клетки доски в синий или красный цвет так, чтобы итоговая доска удовлетворяла следующим условиям:

- в каждой строке и в каждом столбце одинаковое количество синих и красных клеток;
- в каждой строке и в каждом столбце нет трех последовательных клеток одного цвета;
- любые две строки различны и любые два столбца различны. (Если у строк r_1 и r_2 есть клетки разного цвета, находящиеся в одном столбце, то эти строки считаются различными. Аналогично и для столбцов.)

Найдите наименьшее возможное значение k (в зависимости от n), при котором Фархат может покрасить доску не более чем одним способом независимо от раскраски Самата. (Если клетка уже покрашена в синий или в красный цвет, то его больше нельзя перекрашивать.)

Математика пәні бойынша 2023 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі, Шымкент қ.

Жұмыс уақыты: 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

10-11-сынып, 1-күн

1. Центрі O болатын ω шеңберіне ABC үшбұрышы іштей сызылған ($\angle C > 90^\circ$ және $AC > BC$). ω-ға C нүктесінде жүргізілген жанама түзу AB түзуін D нүктесінде қияды. Ω — AOB үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер болсын. OD және AC түзулері Ω-ны екінші рет, сәйкесінше, E және F нүктелерінде қияды. OF және CE түзулері T, ал OD және BC түзулері K нүктесінде қиылысады. O, T, B, K нүктелерінің бір шеңбер бойында жатқанын дәлелдеңіз.

2. Бүтін $n > 100$ саны берілген. 1-ден $4n$-ге дейінгі бүтін сандар төрт саннан тұратын n топқа бөлінген. Осы топтарда келесі шарттарды қанағаттандыратын кем дегенде $\dfrac{(n-6)^2}{2}$ (a, b, c, d) бүтін төрттіктері табылатынын дәлелдеңіз:

(i) $1 \leq a < b < c < d \leq 4n$;

(ii) a, b, c, d сандарының кез келген екеуі әртүрлі топта жатыр;

(iii) $c - b \leq |ad - bc| \leq d - a$.

3. Оң нақты a, b, c сандары үшін $\max\left(\dfrac{a(b+c)}{a^2+bc}, \dfrac{b(c+a)}{b^2+ca}, \dfrac{c(a+b)}{c^2+ab}\right) \leq \dfrac{5}{2}$ шарты орындалады.

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \leq 3$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2023 года, г. Шымкент

Время работы: 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов

10-11 класс, 1 день

1. В окружность ω с центром O вписан такой треугольник ABC, в котором $\angle C > 90^\circ$ и $AC > BC$. Касательная прямая к ω в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AOB. Прямые OD и AC повторно пересекают Ω в точках E и F соответственно. Прямые OF и CE пересекаются в точке T, а прямые OD и BC — в точке K. Докажите, что точки O, T, B, K лежат на одной окружности.

2. Дано целое число $n > 100$. Целые числа от 1 до $4n$ разбиты на n групп, по 4 числа в каждой. Докажите, что найдутся не менее $\dfrac{(n-6)^2}{2}$ четверок (a, b, c, d) целых чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $1 \leq a < b < c < d \leq 4n$;

(ii) числа a, b, c, d лежат в попарно разных группах;

(iii) $c - b \leq |ad - bc| \leq d - a$.

3. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $\max\left(\dfrac{a(b+c)}{a^2+bc}, \dfrac{b(c+a)}{b^2+ca}, \dfrac{c(a+b)}{c^2+ab}\right) \leq \dfrac{5}{2}$. Докажите неравенство

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \leq 3.$$