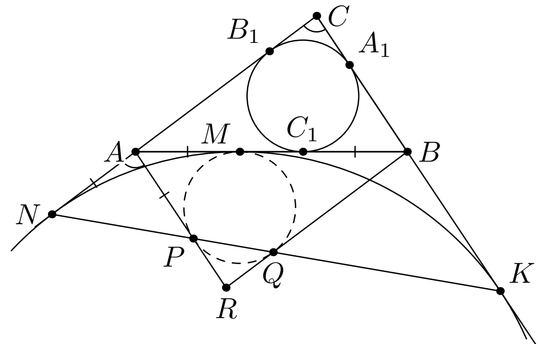
9 сынып. Бірінші турдың шешуі

9.1. ABC үшбұрышының іштейсырт сызылған шеңбері AB қабырғасын M, ал AC және BC қабырғаларының созындыларын, сәйкесінше, N және K нүктелерінде жанайды. NK кесіндісінде P және Q нүктелері $AN = AP$ және $BK = BQ$ болатындай алынған. MPQ үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең екенін дәлелдеңіз.
Шешуі. AP және BQ түзулері R нүктесінде қиылыссын. $CN = CK$ болғандықтан және есептін

$AN = AP$ шартынан, теңбүйірлі ANP және CNK үшбұрыштарында ортақ ANP бұрышы бар, сондықтан олар екі бұрыш бойынша ұқсас. Демек, $\angle NAP = \angle NCK$ немесе $AR \parallel CK$. Дәл сол сияқты, $BR \parallel AC$. Сондықтан $ACBR$ — параллелограмм. Осыдан ABR үшбұрышы BAC үшбұрышына AB қабырғасының ортасына қарағанда симметриялы. ABC үшбұрышының іштей сызылған шеңбері AB, BC, CA қабырғаларын, сәйкесінше, C_1, A_1, B_1 нүктелерінде жанасын. M және C_1 нүктелері AB-ның ортасына қатысты симметриялы екені белгілі дерек. Сондықтан $BA_1 = BC_1 = AM = AN = AP$ теңдіктерінен P және A_1 нүктелері (сәйкесінше, Q және B_1 нүктелері) AB-ның ортасына қатысты симметриялы. Яғни MPQ және $C_1A_1B_1$ үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлер радиустары да деңң. Дәлелдеу керегі осы еді.



9.2. Оң нақты a, b, c сандары үшін $a+b+c \geq 3$ теңсіздігі мен $a^2+b^2+c^2 = 2abc+1$ теңдігі орындалады. $a+b+c \leq 2\sqrt{abc}+1$ теңсіздігін дәлелдеңіз.
Шешуі. a, b, c сандарының кемінде біреуі бірден кіші деп болжамдайық. $a < 1$ болсын (b, c үшін дәл

солай). Есеп шарты бойынша

$$(a^2-1)(b^2-1) = (ab-c)^2 \geq 0,$$

осыдан $b \leq 1$ шығады. Дәл сол сияқты $c \leq 1$. Сонда $a+b+c < 3$, ал бұл есеп шартына қайшы. Сондықтан $a, b, c \geq 1$ $(*)$.

Есепші шығару үшін бізге келесі (бір-біріне эквивалентті) теңсіздіктерді дәлелдеу жеткілікті

$$a+b+c-1 \leqslant 2\sqrt{abc} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b+c-1)^2 \leqslant 4abc \quad \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-2a-2b-2c+1 \leqslant 2abc+(a^2+b^2+c^2-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$ab+bc+ac+1 \leqslant abc+a+b+c \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leqslant (a-1)(b-1)(c-1).$$

Ал соңғы теңсіздік $(*)$ бойынша айқын. Дәлелдеу керегі осы еді.

9.3. Өлшемі $2n \times 2n$ ұяшықты тақта берілген. Самат тақтаның кейбір ұяшықтарын көк немесе қызыл түске бояйды. Ол жалпы дәл k ұяшықты бояу керек. Содан кейін Фархат қалған барлық боялмаған ұяшықтарды көк немесе қызыл түске келесі шарттар орындалатындай бояйды:

- әр қатарда және әр бағанда көк және қызыл ұяшықтар саны тең;
- ешқандай қатарда және ешқандай бағанда қатар келген бір түсті үш ұяшық жоқ;
- кез келген екі қатар әртүрлі және кез келген екі баған әртүрлі. (Егер r_1 және r_2 қатарларының бір бағанда жататын әртүрлі түсті екі ұяшығы табылса, ондай r_1 және r_2 қатарларын әртүрлі деп есептейміз. Дәл сол сияқты баған үшін әртүрлі бағандарды анықтаймыз.)

Фархат Саматтың қалай бояғанына қарамастан тақтаны ең көп дегенде бір әдіспен ғана бояй алатындай n-ге тәуелді ең кіші мүмкін k санын табыңыз. (Ұяшықты бірінші рет бояғаннан кейін үстінен тағы бояуға болмайды.)
Жауабы. $k = 4n^2 - 3$.

Шешуі. Бізге керек бояуды ала алмайтын конфигурацияларды қарастырудың мағынасы жоқ екенін байқайық. Өйткені осы жағдайда жауап 0 саны болады. Сондықтан біз тек бізге керек конфигурацияларды ала алатын бояуларды қарастыратын боламыз. Есеп шартындағы пункттерді (i), (ii), (iii) деп белгілеп алайық.

$k = 4n^2 - 3$ болған кезде тақтада үш боялмаған ұяшықтың тек біреуі ғана болатын қатар немесе баған табылатынын байқайық. Онда есеп шарты бойынша сол ұяшық сөзсіз түрде керек түске боялады. Сол ұяшықты бояйық. Дәл сол сияқты, қалған екі ұяшық үшін тек бір боялмаған ұяшығы бар қатар немесе баған табылады. Ол ұяшық та сөзсіз боялады. Үшінші ұяшық үшін де дәл солай. Демек, тақтаны тек бірден көп емес әдіспен бояй аламыз.

$k = 4n^2 - 4$ болған кезде $4n^2 - 4$ ұяшықтарын бояудың мысалын келтірейік (сол кезде қалған 4 боялмаған ұяшықты екі түрлі жолмен бояуға болады). $n = 1$ немесе $n = 2$ болған кезде ойыншы төмендегі суреттегідей бояй алады, ал қалған 4 ұяшықты шахмат бояуымен екі жолмен бояуға болады. Неліктен бұл бояу тақтаны барлық шарттарды қанағаттандыратынын түсіну қиын емес. Енді $n > 2$ болсын. Диагональдарды 1-ден $4n - 1$ дейін нөмірлейік, бұл жерде i-ші диагоналында (r, c) координаталары бар барлық ұяшықтар бар, $r + c = i + 1$ (жолдар жоғарыдан төмен, ал бағандар солдан оңға қарай нөмірленген). Екі жағдайды қарастырайық.

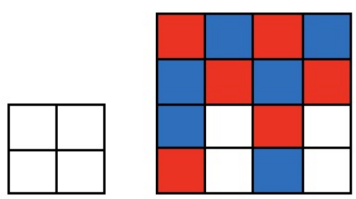


Рис. 1: $n = 1$ және $n = 2$ үшін мысалдар

1) n — тақ сан.
Қызыл түске нөмірлері

$$1,\ 3,\ \ldots,\ 2n-3,\ 2n,\ 2n+3,\ 2n+5,\ \ldots,\ 4n-1,$$

болатын диагональдардағы ұяшықтарды, көк түске нөмірлері

$$2,\ 4,\ \ldots,\ 2n-2,\ 2n+2,\ 2n+4,\ \ldots,\ 4n-2$$

болатын диагональдардағы ұяшықтарды, ал нөмірлері

$$2n-1,\ 2n+1$$

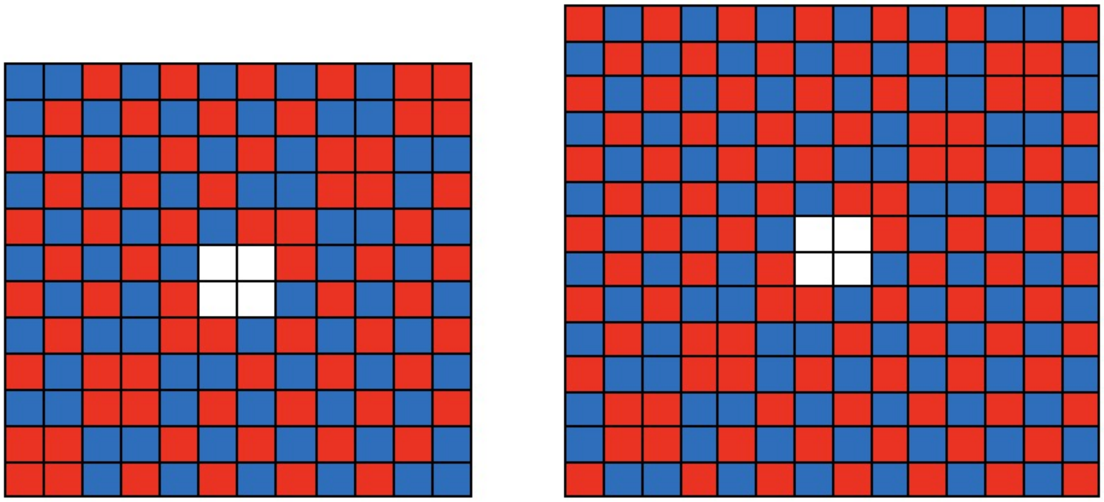


Рис. 2: $n = 6$ және $n = 7$ үшін мысалдар

болатын диагональдардағы ұяшықтарды көк түстен басталатын шахмат үлгісінде бояйық (суретке қараңыз). Егер қатар келген бір түсті үш ұяшық табылса, біздің бояу бойынша бұл ұяшықтардың барлығы әртүрлі диагональдарда, әрі $[2n-2, 2n+2]$ нөмірлі диапазонында, жатуы керек, ал ол мүмкін емес, өйткені $2n-2, 2n+2$-ші диагональдары көк, ал $2n$-ші диагоналы — қызыл. Сондықтан (ii) шарты қанағаттандырылды.

r-жолын қарастырайық және $i = [(r+1)/2]$ болсын. 1-ден $2n-2i$-ге дейінгі нөмірленген бағандарда ұяшық түстері кезектесіп, $2n-2i+3$-ден $2n$-ге дейін, ұяшықтардың түстері кезектесіп, $2n-2i+1$ және $2n-2i+2$ ұяшықтарында түстер әртүрлі болады. Бағандар үшін де солай. (i) шарты орындалды.

Бірінші және соңғы жолдар әртүрлі, өйткені 3-бағандағы түстер әртүрлі және бұл жолдарда қатарынан келген екі қызыл ұяшық жоқ. r-ші жолда ($1 < r < 2n$) тек бір ғана қатарынан келген қызыл түсті ұяшықтар жұбы бар екенін байқайық (олар $2n - 2[r/2]$ және $2n - 2[r/2] + 1$ бағандарда орналасқан). Сондықтан, егер кейбір екі жол тең болып қалса, онда олардың нөмірлері $2k$ және $2k+1$ сандары болады, бұл мүмкін емес, себебі бұл жолдар бірінші немесе соңғы бағанда әртүрлі болып келеді. Дәл осылай тұжырым бағандарға қатысты орындалады. (iii) шарты қанағаттандырылды.

Енді осы конфигурациядан орталық 2×2 шаршының ұяшықтарының түстерін өшірейік. Есептің шарты орындалатындай етіп бұл шаршыны екі түрлі бояуға болатынын дәлелдейік. Біз шахмат бояуымен бояймыз. Осы 2×2 шаршының төменгі сол жақ ұяшығын қызыл түске боясақ, бұл бояу бізді қанағаттандыратынын дәлелдедік. Енді бұл ұяшық көк түске боялған бояуды қарастырайық. (i) шарты орындалып қала береді. Ортадағы екі жол толығымен шахмат бояуында болады және бірінші ұяшықтың түстері әртүрлі, сондықтан (ii) шарт орындалып қала береді. (iii) шарты да орындалып қалады, өйткені барлық басқа жолдарда бір түсті қатарынан келген бір түсті ұяшықтар болады.

2) n — жұп сан.

Қызыл түске нөмірлері

$$3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-3,\ 2n,\ 2n+3,\ 2n+5,\ \ldots,\ 4n-3$$

болатын диагональдардың барлық ұяшықтарын, ал көк түске нөмірлері

$$1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n-2,\ 2n+2,\ 2n+4,\ \ldots, n-2,\ 4n-1$$

болатын диагональдардың барлық ұяшықтарын, ал нөмірлері

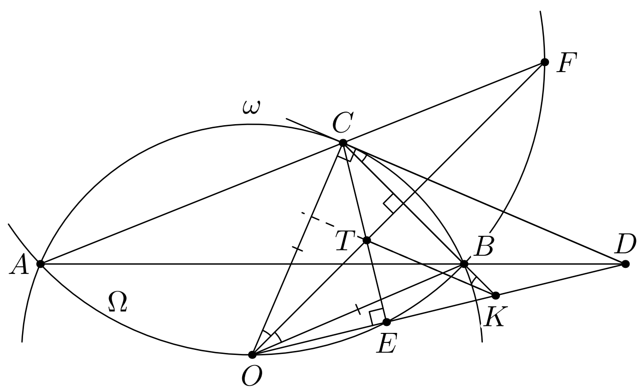
$$2n-1,\ 2n+1$$

болатын диагональдарды шахмат бояуына қызыл түстен бастап бояйық. Сонда осы жағдай үшін шешім бірінші жағдайдағыдай шешіледі.

10-11 сынып. Бірінші турдың шешуі

10-11.1. Центрі O болатын ω шеңберіне ABC үшбұрышы іштей сызылған ($\angle C > 90^\circ$ және $AC > BC$). ω-ға C нүктесінде жүргізілген жанама түзу AB түзуін D нүктесінде қияды. Ω — AOB үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер болсын. OD және AC түзулері Ω-ны екінші рет, сәйкесінше, E және F нүктелерінде қияды. OF және CE түзулері T, ал OD және BC түзулері K нүктесінде қиылысады. O, T, B, K нүктелерінің бір шеңбер бойында жатқанын дәлелдеңіз.

Шешуі. DCO үшбұрышы тікбұрышты ($CO \perp CD$) екенін байқайық. Жанама мен қиюшының қасиеті бойынша $DC^2 = DB \cdot DA = DE \cdot DO$. Соңғы теңдікті $DC/DE = DO/CD$ түрінде қайта жазуға болады. Демек, DEC және DCO үшбұрыштары екінші белгі бойынша ұқсас. Осыдан $\angle CED = \angle OCD = 90^\circ$. OF түзуінің BC кесіндісінің орта перпендикуляры екенін де байқау қиын емес, өйткені BOC үшбұрышы теңбүйірлі әрі $OF \perp BC$ (осы перпендикулярлық $\angle BOF = \angle BAF = \angle BAC = \angle BOC/2$ болғандықтан, яғни OF — BOC бұрышының биссектрисасы болғандығы айқын). Демек, T нүктесі COK үшбұрышының биіктіктерінің қиылысу нүктесі болып келеді. Осыдан шығатын тұжырымдама – $KT \perp CO$. Бірақ соңғы перпендикулярлықтан $TK \parallel CD$ параллелдігі де шығады. Демек, $\angle TKB = \angle BCD = \angle COF = \angle FOB = \angle TOB$, яғни $\angle TKB = \angle TOB$. Соңғы теңдік O, T, B, K нүктелерінің бір шеңбердің бойында жатқанын дәлелдейді.



10-11.2. Бүтін $n > 100$ саны берілген. 1-ден $4n$-ге дейінгі бүтін сандар төрт саннан тұратын n топқа бөлінген. Осы топтарда келесі шарттарды қанағаттандыратын кем дегенде $\dfrac{(n-6)^2}{2}$ (a, b, c, d) бүтін төрттіктері табылатынын дәлелдеңіз:

(i) $1 \le a < b < c < d \le 4n$;

(ii) a, b, c, d сандарының кез келген екеуі әртүрлі топта жатыр;

(iii) $c - b \le |ad - bc| \le d - a$.

Шешуі. $y > x + 1$ болған жағдайда $a = x$, $b = x + 1$, $c = y$, $d = y + 1$ сандары (i) және (iii) шарттарын қанағаттандыратынын байқайық. Өйткені бұл жағдайда

$$c - b = y - x - 1,\ bc - ad = (x+1)y - (y+1)x = y - x,\ d - a = y - x + 1.$$

Сонда, есепті шығару үшін, $x, x+1, y, y+1$ сандары әртүрлі топта жататындай кемінде $\frac{(n-6)^2}{2}$ (x, y) жұптарының табылатынын дәлелдеу жеткілікті. Топтарды 1-ден n-ге дейін нөмірлеп шығайық. Төбелері сәйкес топтар болатын граф салайық. Әр x үшін s_x арқылы x саны жатқан топ нөмірін белгілейік. Егер $s_x = u, s_y = v, |x-y| = 1$ болатындай x, y сандары табылса, u және v төбелерін қабырғамен қосайық. Сонда пайда болған граф байланысқан болады. Шынымен де, кез келген u, v төбелері мен $s_x = u, s_y = v$ болатындай кез келген x, y сандарын қарастырайық. Жалпылықты сақтай отырып $x < y$ деп есептейік. s_x төбесінен s_{x+1} төбесіне жете алатынымызды байқайық. Өйткені, егер $s_x = s_{x+1}$ болса, ол беттесетін төбелер болушы еді, ал кері жағдайда, графты салу ережесі бойынша, олардың арасында қабырға бар. Осыдан, s_{x+1}-ден s_{x+2}-ге, …, s_{y-1}-ден s_y-ке жете аламыз, яғни s_x-тен s_y-ке жете аламыз.

Граф қаңқалы граф болып қалатындай, біздің графтан бірнеше қабырғаларды өшіріп тастайық. S саны, (e_1, e_2)қабырғалар жұбының төрт төбесі де әртүрлі төбелер болатындай (e_1, e_2) жұптар саны болсын. $S \geq \frac{(n-6)^2}{2}$ екенін дәлелдейік. Осыны дәлелдеген жағдайда біз есепті шығардық десек болады, өйткені әр осындай қабырғалар жұбына $x, x+1, y, y+1$ сандары әртүрлі топта жататындай кемінде бір (x, y) төбелер сәйкес келеді. Енді осы графта i төбесінің дәрежесі d_i-ге тең болсын. Бұл граф ағаш болғандықтан $d_1 + \cdots + d_n = 2n-2$ теңдігі орындалады. Нөмірі i болатын төбенің (топтың) әр x саны үшін осы төбе тек $x-1$ және $x+1$ сандары жатқан топпен қабырғамен қосылғандықтан, $d_i \leq 8$ теңсіздігі орындалады.

Алдымен тек бір төбесі беттесетін (e_1, e_2) қабырғалар жұптар санын санайық (олардың ортақ төбесі болатын төбені жаман төбе деп атайық). i төбесі жаман болатын қабырғалар жұбы $\binom{d_i}{2}$ санына тең. Осы графта $n-1$ қабырға болғандықтан,

$$S = \binom{n-1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2 - \sum_{i=1}^n d_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i}{2} = \frac{n^2 - n - \sum_{i=1}^n d_i^2}{2}. \qquad (*)$$

Лемма. $x_1, \ldots, x_n \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ және $x_1 + \cdots + x_n = 2n-2$ болсын. Онда $T = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 10n + 45$.

Дәлелдеуі. Осындай $(x_1, \ldots, x_n)$ тізбектер саны шекті болғандықтан, T санының ең үлкен мәні табылады. Сол мәнді қарастырайық. $2 \leq x_i \leq x_j \leq 7$ болатындай i, j индекстер табылсын делік. Сонда, егер (x_i, x_j) жұбын $(x_i - 1, x_j + 1)$ жұбына ауыстырсақ, қосынды өзгермейді де, ал квадраттардың қосындысы өседі (өйткені $(x_i-1)^2 + (x_j+1)^2 - x_i^2 - x_j^2 = 2(x_j - x_i + 1) > 0$), ал бұл — қайшылық. Демек, $x_1, \ldots, x_n$ сандарының ішінде 8-ге тең k сан мен 1-ге тең $n-k-1$ сан бар. Оған қоса олардың ішінде $1 \leq r \leq 8$ болатындай r саны бар.

$$2n - 2 = x_1 + \cdots + x_n = 8k + (n-k-1) + r \geq 7k + n \Longrightarrow k \leq \frac{n-2}{7}.$$

Осыдан,

$$T = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 64k + (n-k-1) + r^2 \leq 9(n-2) + n - 1 + 8^2 = 10n + 45.$$

(*) теңдігінен және леммадан шығатын теңсіздік келесідей:

$$S \geq \frac{n^2 - 11n - 45}{2} > \frac{(n-6)^2}{2},$$

ал ол дұрыс теңсіздік, өйткені $n > 100$.

10-11.3. Оң нақты a, b, c сандары үшін $\max\left(\frac{a(b+c)}{a^2+bc}, \frac{b(c+a)}{b^2+ca}, \frac{c(a+b)}{c^2+ab}\right) \leq \frac{5}{2}$ шарты орындалады.

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \leq 3$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

Шешуі. Жалпылықты сақтай отырып, $a \geqslant b \geqslant c$ деп алайық. Есепті шығару үшін

$$\frac{ba+bc}{b^2+ac} - 1 \leqslant 1 - \frac{ab+ac}{a^2+bc} + 1 - \frac{ca+cb}{c^2+ab} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-b)(b-c)}{b^2+ac} \leqslant \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{(a-c)(b-c)}{c^2+ab} \tag{1}$$

екенін көрсету жеткілікті. Егер $a = b$ немесе $b = c$ болса, онда (1) теңсіздігі орындалып тұр, өйткені сол теңсіздікте оң жағындағы әр қосынды теріс емес сан. Енді $a > b > c$ деп есептейік. Онда (1) теңсіздігі келесі теңсіздікке эквивалентті:

$$\frac{1}{(a-c)(b^2+ac)} \leqslant \frac{1}{(b-c)(a^2+bc)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+ab)}. \tag{2}$$

Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша

$$\frac{1^2}{(b-c)(a^2+bc)} + \frac{1^2}{(a-b)(c^2+ab)} \geqslant \frac{(1+1)^2}{(b-c)(a^2+bc)+(a-b)(c^2+ab)} = \frac{4}{(a-c)(2ab+2bc-b^2-ac)}. \tag{3}$$

Сондықтан,

$$\frac{4}{(a-c)(2ab+2bc-b^2-ac)} \geqslant \frac{1}{(a-c)(b^2+ac)} \quad \Leftrightarrow$$

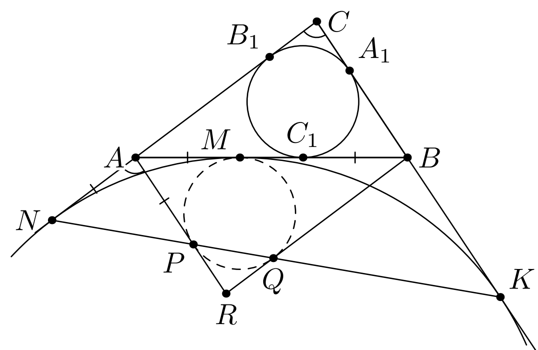
$$5b^2+5ac \geqslant 2(ab+bc) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \geqslant \frac{b(c+a)}{b^2+ac},$$

екенін көрсету жеткілікті. Ал ол есеп шарты бойынша дұрыс.

Решения задач 9 класса первого тура

9.1. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке M, а продолжений сторон AC и BC — в точках N и K соответственно. На отрезке NK выбраны точки P и Q так, что $AN = AP$ и $BK = BQ$. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника MPQ равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть прямые AP и BQ пересекаются в точке R. Так как $CN = CK$, то из условия $AN = AP$ следует, что равнобедренных треугольниках ANP и CNK есть общий угол ANP, поэтому они подобны по трём углам. Следовательно, $\angle NAP = \angle NCK$ или $AR \parallel CK$. Аналогично, $BR \parallel AC$. Поэтому $ACBR$ — параллелограмм. Следовательно, треугольник ABR центрально симметричен треугольнику BAC относительно середины стороны AB. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Также известным фактом является то, что точки M и C_1 также симметричны относительно середины AB. Поэтому из равенств $BA_1 = BC_1 = AM = AN = AP$ следует, что точки P и A_1 (аналогично, и точки Q и B_1) центрально симметричны относительно середины AB. Поэтому радиусы описанных окружностей треугольников MPQ и $C_1A_1B_1$ равны. Это и требовалось доказать.



9.2. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $a+b+c \geq 3$ и $a^2+b^2+c^2 = 2abc+1$. Докажите, что
$$a + b + c \leq 2\sqrt{abc} + 1.$$

Решение. Предположим, что хотя бы одно из чисел a, b, c меньше 1. БОО $a < 1$. По условию имеем, что
$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = (ab - c)^2 \geq 0,$$
откуда $b \leq 1$. Аналогично $c \leq 1$. Тогда $a + b + c < 3$, что противоречит условию. Значит $a, b, c \geq 1$.

Нам достаточно показать, что
$$a + b + c - 1 \leqslant 2\sqrt{abc} \quad \Leftrightarrow \quad (a + b + c - 1)^2 \leqslant 4abc \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 2a - 2b - 2c + 1 \leqslant 2abc + (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \quad \Leftrightarrow$$
$$ab + bc + ac + 1 \leqslant abc + a + b + c \quad \Leftrightarrow$$
$$0 \leqslant (a - 1)(b - 1)(c - 1),$$
что верно, ч.т.д.

9.3. Дана клетчатая доска $2n \times 2n$. Самат закрашивает некоторые клетки в синий или в красный цвет. Он должен раскрасить ровно k клеток. Фархат раскрашивает все остальные клетки доски в синий или красный цвет так, чтобы итоговая доска удовлетворяла следующим условиям:

- в каждой строке и в каждом столбце одинаковое количество синих и красных клеток;
- в каждой строке и в каждом столбце нет трех последовательных клеток одного цвета;
- любые две строки различны и любые два столбца различны. (Если у строк r_1 и r_2 есть клетки разного цвета, находящиеся в одном столбце, то эти строки считаются различными. Аналогично и для столбцов.)

Найдите наименьшее возможное значение k (в зависимости от n), при котором Фархат может покрасить доску не более чем одним способом независимо от раскраски Самата. (Если клетка уже покрашена в синий или в красный цвет, то его больше нельзя перекрашивать.)
Ответ. $k = 4n^2 - 3$.

Решение. Заметим, что нет смысла рассматривать раскраски, из которых нельзя получить нужную конфигурацию, так как в этом случае ответ будет 0. Поэтому будем смотреть только те раскраски, из которых можно получить нужную нам конфигурацию. Обозначим данные три условия через (i), (ii), (iii).

При $k = 4n^2 - 3$ заметим, что существует строка или столбец содержащий ровно одну из 3 незакрашенных клеток. Тогда по первому условию цвет этой клетки однозначно определяется. Закрасим ее в этот цвет. Аналогично для двух оставшихся клеток можно найти строку или столбец, который содержит ровно одну из этих незакрашенных клеток, также по первому усолвию они однозначно определяются. Значит доску можно закрасить не более чем одним способом.

При $k = 4n^2 - 4$ приведем пример раскраски $4n^2 - 4$ клеток, при котором остальные 4 незакрашенные клетки можно будет закрасить двумя различными способами. При $n = 1$ или $n = 2$, игрок может закрасить как на рисунке ниже и оставшиеся 4 клетки можно закрасить шахматной раскраской двумя способами. Не трудно понять, почему эти раскраски удовлетворяют всем условиям. Пусть теперь $n > 2$. Пронумеруем диагонали числами от 1 до $4n - 1$, где в i-й диагонали находится все клетки с координатами (r, c), что $r + c = i + 1$ (нумерация строк идет сверху вниз, а столбцов слева направо). Рассмотрим два случая.

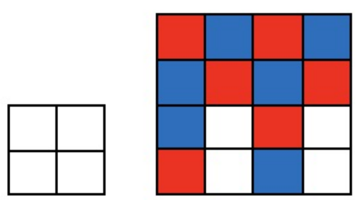


Рис. 1: Примеры для $n = 1$ и $n = 2$

1) n — нечетно.

Покрасим в красный цвет все клетки диагоналей с номерами $1, 3, \ldots, 2n-3, 2n, 2n+3, 2n+5, \ldots, 4n-1$, в синий цвет $2, 4, \ldots, 2n-2, 2n+2, 2n+4, \ldots, 4n-2$, а диагонали $2n-1, 2n+1$ покрасим в шахматном порядке начиная с синего цвета (смотрите на рисунок). Если найдутся три последовательных клетов одного цвета, то по построению следует, что все эти клетки должны лежать в разных диагоналях, в номерах в диапазоне $[2n-2, 2n+2]$, что невозможно, так как $2n-2, 2n+2$-ые диагонали синего цвета, а $2n$-й диагональ красного. Условие (ii) выполняется.

Рассмотрим строку r, и пусть $i = [(r+1)/2]$. В столбцах с номерами от 1 до $2n - 2i$ цвета клеток чередуются, от $2n - 2i + 3$ до $2n$ цвета клеток чередуются, а также в клетках $2n - 2i + 1$ и $2n - 2i + 2$ цвета клеток разные. Аналогично и для столбцов. Условие (i) выполняется.

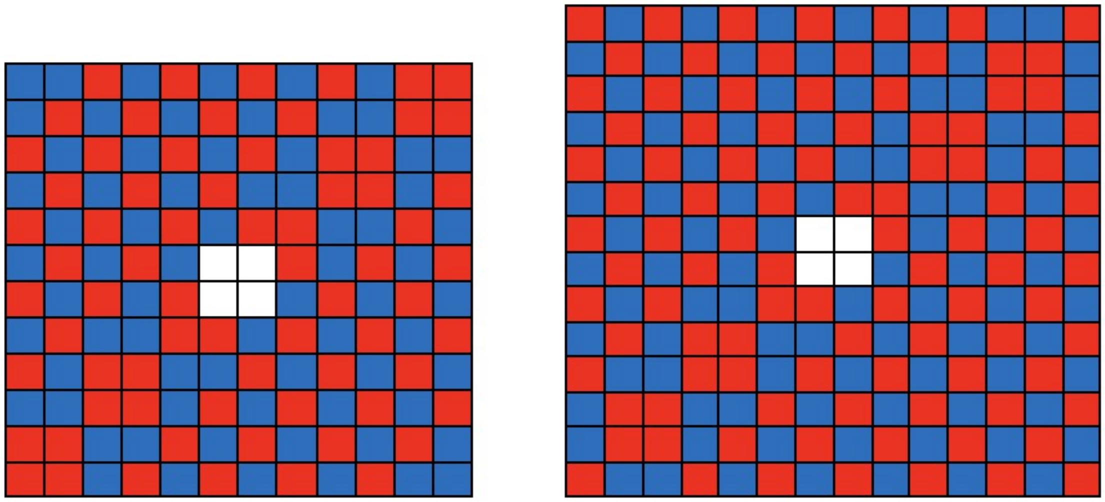


Рис. 2: Примеры для $n = 6$ и $n = 7$

Первая и последняя строка разные, так как отличается цвет в 3-м столбце, также в этих строках нет двух подряд клеток красного цвета. Заметим, что в r-й строке $(1 < r < 2n)$ есть ровно одна пара подряд идущих клеток красного цвета, причем в $2n - 2[r/2]$ и $2n - 2[r/2] + 1$ столбцах. Следовательно, если какие-то две строки оказались равны, то они имеют номера $2k$ и $2k + 1$, что невозможно так как эти строки различаются в первом или в последнем столбце. Аналогичное утверждение верно и для столбцов. Условие (iii) выполняется.

Теперь из этой конфигураций стерем цвета клеток центрального квадрата 2×2. Докажем, что этот квадрат можно закрасить двумя способами, чтобы выполнялось условие задачи. Будем красить шахматной раскраской. Мы доказали, что если раскрасить левую нижнюю клетку этого квадрата 2×2 в красный цвет, то эта раскраска нам подходит. Теперь рассмотрим раскраску, в котором эта клетка синего цвета. Условие (i) остается верным. Центральные две строки полностью будут раскрашены в шахматном порядке, причем цвета первой клетки у них различны, следовательно условие (ii) остается верным. Условие (iii) также остается верным, так как у всех других строк есть подряд идущие клетки одного цвета.

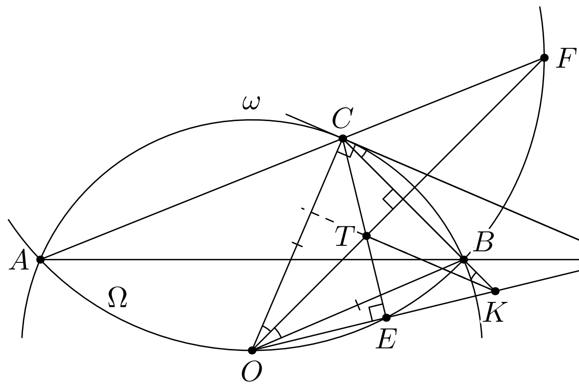
2) n — четно.

Покрасим в красный цвет все клетки диагоналей с номерами $3, 5, \ldots, 2n-3, 2n, 2n+3, 2n+5, \ldots, 4n-3$, в синий цвет $1, 2, 4, \ldots, 2n-2, 2n+2, 2n+4, \ldots, 4n-2, 4n-1$, а диагонали $2n-1, 2n+1$ покрасим в шахматном порядке начиная с красного цвета (смотрите на рисунок). Решение аналогично как и для первого случая.

Решения задач 10-11 классов первого дня

10-11.1. В окружность ω с центром O вписан такой треугольник ABC, в котором $\angle C > 90^\circ$ и $AC > BC$. Касательная прямая к ω в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AOB. Прямые OD и AC повторно пересекают Ω в точках E и F соответственно. Прямые OF и CE пересекаются в точке T, а прямые OD и BC — в точке K. Докажите, что точки O, T, B, K лежат на одной окружности.

Решение. Заметим, что треугольник DCO является прямоугольным $(CO \perp CD)$ и выполнено равенство $DC^2 = DB \cdot DA = DE \cdot DO$ (по свойству касательной и степени точки) которое можно переписать как $DC/DE = DO/CD$. Следовательно, треугольники DEC и DCO подобны по второму признаку, откуда $\angle CED = \angle OCD = 90°$. Также несложно заметить, что прямая OF является серединным перпендикуляром отрезка BC, так как треугольник BOC является равнобедренным и $OF \perp BC$ (последнее верно в виду того, что $\angle BOF = \angle BAF = \angle BAC = \angle BOC/2$, то есть OF — биссектриса угла BOC). Следовательно, точка T является точкой пересечения высот треугольника COK. Как следствие, $KT \perp CO$. Но из последнего также следует параллельность $TK \parallel CD$. Поэтому $\angle TKB = \angle BCD = \angle COF = \angle FOB = \angle TOB$, то есть $\angle TKB = \angle TOB$. Этого условия достаточно для того, чтобы точки O, T, B, K лежали на одной окружности.



10-11.2. Дано целое число $n > 100$. Целые числа от 1 до $4n$ разбиты на n групп, по 4 числа в каждой. Докажите, что найдутся не менее $\dfrac{(n-6)^2}{2}$ четверок (a, b, c, d) целых чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $1 \le a < b < c < d \le 4n$;

(ii) числа a, b, c, d лежат в попарно разных группах;

(iii) $c - b \le |ad - bc| \le d - a$.

Решение. Заметим, что при $y > x + 1$ числа $a = x, b = x + 1, c = y, d = y + 1$ удовлетворяют условиям *(i)* и *(iii)*, так как $c - b = y - x - 1, bc - ad = (x + 1)y - (y + 1)x = y - x, d - a = y - x + 1$. Тогда достаточно доказать, что найдется не меньше $\dfrac{(n-6)^2}{2}$ пар (x, y), что числа $x, x + 1, y, y + 1$ лежат в разных группах. Пронумеруем группы числами от 1 до n. Построим граф на n вершинах, где вершины соответствуют группам. Для каждого числа x обозначим через s_x номер группы, в которой лежит x. Между вершинами u и v проведем ребро, если найдутся числа x, y такие, что $s_x = u, s_y = v, |x - y| = 1$. Заметим, что получившийся граф связный. Действительно рассмотрим любые две вершины u, v и рассмотрим произвольные числа x, y, для которых $s_x = u, s_y = v$. БОО $x < y$. Заметим, что из вершины s_x достижима вершина s_{x+1}, так как если $s_x = s_{x+1}$, то эта одна и та же вершина, а в противном случае по построению графа между ними есть ребро. Отсюда получим, что из s_{x+1} достижима $s_{x+2}, \ldots$, из s_{y-1} достижима s_y, т.е. из s_x достижима s_y.

Удалим некоторые ребра графа так, чтобы получилось остовное дерево. Пусть S количество пар ребер (e_1, e_2) такие, что все четыре конца этих ребер различны. Докажем, что $S \ge \dfrac{(n-6)^2}{2}$. В этом случае мы решим задачу, так как каждой такой паре ребер соответствует хотя бы одна пара (x, y) такая, что числа $x, x + 1, y, y + 1$ лежат в разных группах. Пусть теперь в этом графе степень i-й вершины равна d_i. Так как это дерево, то $d_1 + \cdots + d_n = 2n - 2$. Заметим, что $d_i \le 8$, так как для каждого числа x из i-й группы эта вершина может быть соединена только с группами, в которых находится числа $x - 1$ и $x + 1$.

Сначала посчитаем количество пар ребер (e_1, e_2) таких, что у них совпадает один конец (назовем эту вершину плохим). Количество пар ребер, в котором вершина i плохая равно $\binom{d_i}{2}$. Так как всего ребер в этом графе $n-1$, то

$$S = \binom{n-1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2 - \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i}{2} = \frac{n^2 - n - \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{2}. \qquad (*)$$

Лемма. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ и $x_1 + \cdots + x_n = 2n - 2$. Тогда $T = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le 10n + 45$.

Доказательство: Так как к-во таких последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$ конечно, то у T существует максимум. Рассмотрим этот максимум. Предположим, что найдутся индексы i, j такие, что $2 \le x_i \le x_j \le 7$. Тогда если заменить (x_i, x_j) на $(x_i - 1, x_j + 1)$, то сумма не меняется, а сумма квадратов увеличится $((x_i - 1)^2 + (x_j + 1)^2 - x_i^2 - x_j^2 = 2(x_j - x_i + 1) > 0)$, противоречие. Значит среди $x_1, \ldots, x_n$ есть k чисел равных 8, $n - k - 1$ чисел равных 1, и число r $(1 \le r \le 8)$.

$$2n - 2 = x_1 + \cdots + x_n = 8k + (n - k - 1) + r \ge 7k + n \Longrightarrow k \le \frac{n-2}{7}.$$

Следовательно

$$T = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 64k + (n - k - 1) + r^2 \le 9(n-2) + n - 1 + 8^2 = 10n + 45.$$

Из (*) и леммы следует, что

$$S \ge \frac{n^2 - 11n - 45}{2} > \frac{(n-6)^2}{2},$$

где последнее неравенство верно, так как $n > 100$.

10-11.3. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $\max\left(\frac{a(b+c)}{a^2+bc}, \frac{b(c+a)}{b^2+ca}, \frac{c(a+b)}{c^2+ab}\right) \le \frac{5}{2}$. Докажите неравенство

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \le 3.$$

Решение. Без ограничения общности положим $a \geqslant b \geqslant c$. Достаточно показать, что

$$\frac{ba+bc}{b^2+ac} - 1 \leqslant 1 - \frac{ab+ac}{a^2+bc} + 1 - \frac{ca+cb}{c^2+ab} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-b)(b-c)}{b^2+ac} \leqslant \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{(a-c)(b-c)}{c^2+ab}. \qquad (1)$$

Если $a = b$ или $b = c$, то (1) верно, поскольку каждое слагаемое в правой части (1) неотрицательна. Теперь будем считать, что $a > b > c$. Тогда (1) эквивалентно:

$$\frac{1}{(a-c)(b^2+ac)} \leqslant \frac{1}{(b-c)(a^2+bc)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+ab)}. \qquad (2)$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\frac{1^2}{(b-c)(a^2+bc)} + \frac{1^2}{(a-b)(c^2+ab)} \geqslant \frac{(1+1)^2}{(b-c)(a^2+bc) + (a-b)(c^2+ab)} = \frac{4}{(a-c)(2ab+2bc-b^2-ac)}. \qquad (3)$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\frac{4}{(a-c)(2ab+2bc-b^2-ac)} \geqslant \frac{1}{(a-c)(b^2+ac)} \quad \Leftrightarrow$$

$$5b^2 + 5ac \geqslant 2(ab+bc) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \geqslant \frac{b(c+a)}{b^2+ac},$$

что верно по условию задачи.