Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып, 1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC тікбұрышты үшбұрышында ($\angle C = 90^\circ$) CH биіктігі жүргізілді. H нүктесінен AC және BC қабырғаларына сәйкесінше HP және HQ перпендикулярлары түсірілді. PQ түзуінің бойынан кез келген M нүктесі алынған. M нүктесінен өтетін MH түзуіне перпендикуляр болатын түзу AC және BC түзулерін сәйкесінше R және S нүктелерінде қияды. M нүктесінен басқа $M_1 \in (PQ)$ нүктесін алайық және сәйкесінше R_1 және S_1 нүктелерін қарастырайық. $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ қатынасы тұрақты болатын дәлелдеңіз.

2. p жай саны берілген. Кез келген бүтін a саны үшін, $1 < a < \dfrac{p}{2}$, $\dfrac{p}{2} < b < p$ және $(ab-1)$ p-ға бөлінетіндей b саны табылады. Осындай барлық p санын табыңыз.

3. A натурал саны үшін $Z(A)$ деп A санын кері ретпен жазылған сан ретінде анықтаймыз (мысалы, $Z(521) = 125$). A саны ***«жақсы»*** деп аталады, егер оның ондық жүйесіндегі жазбасында нөлдер болмаса, бірінші цифры соңғысына тең болмаса және $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. 10^6 үлкен барлық «жақсы» сандарды табыңыз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс, 1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH. Из точки H опустили перпендикуляры HP и HQ на стороны AC и BC соответственно. На прямой PQ выбрали произвольную точку M. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно MH, пересекает прямые AC и BC в точках R и S соответственно. Пусть $M_1 \in (PQ)$ — другая точка, отличная от M. Аналогично для M_1 определим соответствующие точки R_1 и S_1. Докажите, что отношение $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ постоянно.

2. Дано некоторое простое число p. Для каждого целого числа a, $1 < a < \dfrac{p}{2}$, найдется такое целое число b, что $\dfrac{p}{2} < b < p$ и $ab-1$ делится на p. Найдите все такие p.

3. Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бо́льшие 10^6.