Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып, 1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC тікбұрышты үшбұрышында ($\angle C = 90^\circ$) CH биіктігі жүргізілді. H нүктесінен AC және BC қабырғаларына сәйкесінше HP және HQ перпендикулярлары түсірілді. PQ түзуінің бойынан кез келген M нүктесі алынған. M нүктесінен өтетін MH түзуіне перпендикуляр болатын түзу AC және BC түзулерін сәйкесінше R және S нүктелерінде қияды. M нүктесінен басқа $M_1 \in (PQ)$ нүктесін алайық және сәйкесінше R_1 және S_1 нүктелерін қарастырайық. $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ қатынасы тұрақты болатын дәлелдеңіз.

2. p жай саны берілген. Кез келген бүтін a саны үшін, $1 < a < \dfrac{p}{2}$, $\dfrac{p}{2} < b < p$ және $(ab-1)$ p-ға бөлінетіндей b саны табылады. Осындай барлық p санын табыңыз.

3. A натурал саны үшін $Z(A)$ деп A санын кері ретпен жазылған сан ретінде анықтаймыз (мысалы, $Z(521) = 125$). A саны ***«жақсы»*** деп аталады, егер оның ондық жүйесіндегі жазбасында нөлдер болмаса, бірінші цифры соңғысына тең болмаса және $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. 10^6 үлкен барлық «жақсы» сандарды табыңыз.

Заключительный этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс, 1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH. Из точки H опустили перпендикуляры HP и HQ на стороны AC и BC соответственно. На прямой PQ выбрали произвольную точку M. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно MH, пересекает прямые AC и BC в точках R и S соответственно. Пусть $M_1 \in (PQ)$ — другая точка, отличная от M. Аналогично для M_1 определим соответствующие точки R_1 и S_1. Докажите, что отношение $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ постоянно.

2. Дано некоторое простое число p. Для каждого целого числа a, $1 < a < \dfrac{p}{2}$, найдется такое целое число b, что $\dfrac{p}{2} < b < p$ и $ab - 1$ делится на p. Найдите все такие p.

3. Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бóльшие 10^6.

Решения заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

9 класс

День 1

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за

слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

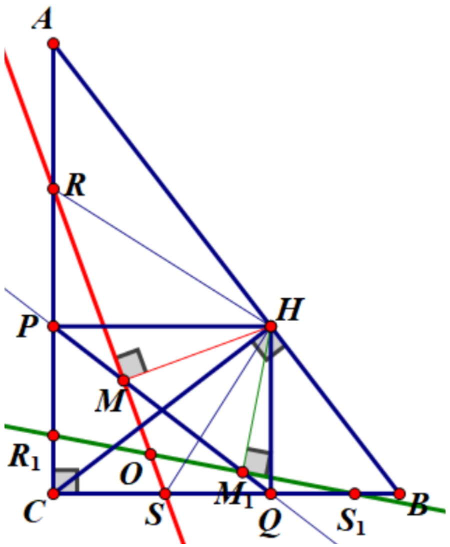
Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 9.1

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH. Из точки H опустили перпендикуляры HP и HQ на стороны AC и BC соответственно. На прямой PQ выбрали произвольную точку M. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно MH, пересекает прямые AC и BC в точках R и S соответственно. Пусть $M_1 \in (PQ)$ — другая точка, отличная от M. Аналогично для M_1 определим соответствующие точки R_1 и S_1. Докажите, что отношение $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ постоянно.

Решение. Пусть прямые RS и R_1S_1 пересекаются в точке O.



Так как H, R, P, M лежат на одной окружности с диаметром HR, и точки P, H, R_1, M_1 — на окружности с диаметром HR_1, то $\angle(MR, HR) = \angle(MP, HP) = \angle(M_1R_1, HR_1)$.

Аналогично, $\angle(HS, MS) = \angle(HQ, M_1Q) = \angle(HS_1, MS_1)$.

Следовательно, треугольники HR_1R и HS_1S подобны, а в них отрезки HP и HQ являются соответствующими высотами. Поэтому $RR_1/SS_1 = HP/HQ = \mathrm{const}$.

Задача 9.2

Дано некоторое простое число p. Для каждого целого числа a, $1 < a < \dfrac{p}{2}$, найдется такое целое число b, что $\dfrac{p}{2} < b < p$ и $ab - 1$ делится на p. Найдите все такие p.

Ответ: $p = 5{,}7{,}13$.

Решение.

Пусть $p > 20$. Очевидно,что $p-1$ делится на 2,3,4. Заметим, что одно из $p+1{,}2p+1{,}3p+1{,}4p+1$ делится на 5. Легко понять, что это или $3p+1$ или $4p+1$. Если $3p+1$ то $10, \frac{3p+1}{10} < \frac{p}{2}$. Противоречие. Следовательно $p-1$ делится на $2{,}3{,}4{,}5{,}6 \Rightarrow p = 60k+1$. Если $p = 61$ то $8 \cdot 23 \equiv 1 \pmod{61}$. Противоречие. Следовательно, $p \geqslant 121$.

Каждое из чисел в парах

$$(7, \frac{p+1}{7}), (7, \frac{2p+1}{7}), (7, \frac{3p+1}{7}), (35, \frac{4p+1}{7}), (42, \frac{5p+1}{42})$$

меньше чем $\frac{p}{2}$, следовательно, $p-1$ делится на 7.

Теперь пусть $p \equiv 1 \pmod{k}$, и $\frac{p}{2} > n \geqslant 8$ для всех $k < n$. Докажем, что $p \equiv 1 \pmod{n}$.

Очевидно, что $p > 2n^2$. Тогда в паре $\left(n(k+1), \frac{kp+1}{n(k+1)}\right)$ числа меньше чем $\frac{p}{2}$, где $k = 1, 2, \ldots, n-2$, значит,

$$(n-1)p \equiv -1 \pmod{n} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{n}.$$

Но тогда $p-1$ делится на НОК$(\frac{p-1}{2}, \frac{p-3}{2})$, отсюда $p - 1 \geqslant \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-3}{2}$. Противоречие.

Осталось рассмотреть все простые меньше чем 20. Подходят только 5, 7, 13, так как $3 \cdot 4 - 1{,}3 \cdot 6 - 1{,}4 \cdot 5 - 1$ делится на 11, 17, 19 соответственно, а при 2, 3 чисел a вообще нет.

Задача 9.3

Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бо́льшие 10^6.

Ответ: 1111112, 2111111.

Решение.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & & & \times & a_1 & a_2 & \ldots\ a_n \\ & & & & & b_1 & b_2 & \ldots\ b_n \\ \hline & & & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & c_{1\,n+1} \\ & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & \ldots & c_{2\,n+1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & & & & \\ \hline \end{array}$$

Заметим, что если $k \leqslant n+1$ то в $k-$том столбце максимум $k-1$ переходов, в столбце $n+2$ максимум n переходов. В столбце $n+3$ максимум $n-1$ переходов и.т.д.В столбце $2n+1$ максимум 1 переход. Если есть столбец $2n+2$, то в нём нет переходов.

Пусть

$$\begin{cases} (\overline{a_0a_1...a_k})^2 = \overline{b_0b_1...b_n}, (1) \\ (\overline{a_ka_{k-1}...a_0})^2 = \overline{b_nb_{n-1}...b_0}.(2) \end{cases}$$

Без ограничения общности будем считать, что $a_0 > a_k$. Тогда из (2) следует, что $a_0^2 \equiv b_0 \pmod{10} \Rightarrow a_0^2 = 10l + b_0$. Тогда из (1) следует, что $b_0 = [\frac{a_0^2}{10}]+$ переходы($[x]-$ целая часть). Пусть $l > 0 \Rightarrow a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49{,}64{,}81$. Но для $a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49$ нужно минимум 3 перехода. Что невозможно так как в столбце $2k+2$ максимум 2 перехода. Если же $a_0^2 = 64{,}81$ то потребуется минимум 2 перехода. Что также невозможно так как в столбце $2k+3$ максимум 1 переход. Противоречие. Значит $a_0^2 = b_0$ и $a_0 = 2{,}3$.

Заметим, что из (1) следует $2a_0a_1+$переходы$\equiv b_1 \pmod{10}$,а из (2) следует, что $2a_0a_1 \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow 2a_0a_1 = b_1$ иначе были бы переходы в (1) при a_0^2. Значит при b_1 нет переходов. Аналогично из (1) следует $S+$переходы$\equiv b_i \pmod{10}$,а из (2) следует, что $S \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow S = b_i$ иначе были бы переходы при b_{i-1}. Значит вообще нет переходов.

Если $k \geqslant 7 \Rightarrow$ коэффициент при 10^{2k-7} в (1) будет минимум $2a_0a_7 + 2a_1a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4 \geqslant 2\cdot 2\cdot 1 + 2 + 2 + 2 = 10$. То есть был бы переход. Противоречие. Значит $k = 6$.

Рассмотрим коэффициент при 10^6 в (1). Пусть это u. Если $a_0 > 2$ тогда $u \geqslant 2a_0a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 \geqslant 2\cdot 3\cdot 1 + 2 + 2 + 1 = 11$. Противоречие. Если хотя бы один из $a_i(i = 1,2,...,6)$ больше 1. То тогда $u \geqslant 2a_0a_6+2a_1a_5+2a_2a_4+a_3^2 \geqslant 10$. Противоречие. Значит остается только одно число 2111111. Не сложно убедится, что оно удовлетворяет требованием задачи.