

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

11-сынып, 2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. $P(1) \leq 2022$ және коэффициенттері оң бүтін сан болатын 699-ыншы дәрежелі $P(x)$ көпмүшесі берілсін. Онда қосындысы 22, 55 немесе 77-ге тең болатын бірнеше қатар тұрған коэффициенттер табылатынын дәлелдеңіз.
5. Диагональдары O нүктесінде қиылысатын, шеңберге іштей сызылған дөңес $ABCD$ төртбұрышы берілген. M және N — сәйкесінше AD және BC қабырғаларының ортасы. $ABCD$ төртбұрышына сырттай сызылған шеңбердің C және D нүктелері жатпайтын AB доғасынан $\angle SMA = \angle SNB$ болатындай S нүктесі алынған. SM , SN , AB және CD түзулерінен пайда болған төртбұрыштың диагональдары T нүктесінде қиылыссын. S , O , T нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңіз.
6. Кез келген $n \geq 1$ үшін, $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ шарты орындалатындай шексіз $\{a_n\}$ натурал сандар тізбегі берілсін. Кез келген i индексі үшін, a_j^j саны a_i^i санына бөлінетіндей $j > i$ индексі табылатынын дәлелдеңіз.

Заключительный этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

11 класс, 2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. Дан многочлен $P(x)$ 699-й степени с положительными целыми коэффициентами, причем $P(1) \leq 2022$. Докажите, что найдутся несколько подряд идущих коэффициентов, сумма которых равна 22, 55 или 77.
5. Дан вписанный выпуклый четырехугольник $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей O . M и N — середины сторон AD и BC соответственно. На дуге AB , не содержащей точек C и D , описанной окружности $ABCD$ отметили точку S такую, что $\angle SMA = \angle SNB$. Пусть T — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника образованного прямыми SM , SN , AB и CD . Докажите, что точки S , O , T лежат на одной прямой.
6. Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$, для любого $n \geq 1$. Докажите, что для любого индекса i найдется такой индекс $j > i$, что a_j^j делится на a_i^i .