Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып, 2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. $P(1) \leqslant 2022$ және коэффициенттері оң бүтін сан болатын 699-ыншы дәрежелі $P(x)$ көпмүшесі берілсін. Онда қосындысы 22, 55 немесе 77-ге тең болатын бірнеше қатар тұрған коэффициенттер табылатынын дәлелдеңіз.

5. Диагональдары O нүктесінде қиылысатын, шеңберге іштей сызылған дөңес $ABCD$ төртбұрышы берілген. M және N — сәйкесінше AD және BC қабырғаларының ортасы. $ABCD$ төртбұрышына сырттай сызылған шеңбердің C және D нүктелері жатпайтын AB доғасынан $\angle SMA = \angle SNB$ болатындай S нүктесі алынған. SM, SN, AB және CD түзулерінен пайда болған төртбұрыштың диагональдары T нүктесінде қиылыссын. S, O, T нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңіз.

6. Кез келген $n \geqslant 1$ үшін, $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ шарты орындалатындай шексіз $\{a_n\}$ натурал сандар тізбегі берілсін. Кез келген i индексі үшін, a_j^j саны a_i^i санына бөлінетіндей $j > i$ индексі табылатынын дәлелдеңіз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс, 2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. Дан многочлен $P(x)$ 699-й степени с положительными целыми коэффициентами, причем $P(1) \leqslant 2022$. Докажите, что найдутся несколько подряд идущих коэффициентов, сумма которых равна $22, 55$ или 77.

5. Дан вписанный выпуклый четырехугольник $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей O. M и N – середины сторон AD и BC соответственно. На дуге AB, не содержащей точек C и D, описанной окружности $ABCD$ отметили точку S такую, что $\angle SMA = \angle SNB$. Пусть T - точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника образованного прямыми SM, SN, AB и CD. Докажите, что точки S, O, T лежат на одной прямой.

6. Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$, для любого $n \geqslant 1$. Докажите, что для любого индекса i надется такой индекс $j > i$, что a_j^j делится на a_i^i.