Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып, 1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AD, BE және CF биіктіктері жүргізілді. $PQ||BC$ болатындай AB және AC кесінділерінен сәйкесінше P және Q нүктелері алынған. Диаметрлері BQ және CP болатын шеңберлер R және T нүктелерінде қиылысады (A нүктесіне T нүктесінен қарағанда R нүктесі жақын). CM және BN — BCR үшбұрышының биіктіктері болсын. FM, NE және AD түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.

2. A натурал саны үшін $Z(A)$ деп A санын кері ретпен жазылған сан ретінде анықтаймыз (мысалы, $Z(521) = 125$). A саны ***«жақсы»*** деп аталады, егер оның ондық жүйесіндегі жазбасында нөлдер болмаса, бірінші цифры соңғысына тең болмаса және $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. 10^6 үлкен барлық «жақсы» сандарды табыңыз.

3. $m \in \mathbb{N}$ болсын. Кез келген $x, y \in \mathbb{R}^+$ үшін келесі шарт орындалатындай барлық $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ функцияларын табыңыз

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Бұл жердегі $f^{(m)}(y) = \underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс, 1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD, BE и CF. P и Q лежат на отрезках AB и AC соответственно так, что прямая PQ параллельна BC. Окружности построенные на BQ и CP, как на диаметрах, пересекаются в точках R и T (R является ближе к A чем T). Пусть CM и BN — высоты в треугольнике BCR. Докажите, что прямые FM, NE и AD пересекаются в одной точке.

2. Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бóльшие 10^6.

3. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$ выполнено

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Здесь $f^{(m)}(y) = \underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.