Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып, 1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AD, BE және CF биіктіктері жүргізілді. $PQ||BC$ болатындай AB және AC кесінділерінен сәйкесінше P және Q нүктелері алынған. Диаметрлері BQ және CP болатын шеңберлер R және T нүктелерінде қиылысады (A нүктесіне T нүктесінен қарағанда R нүктесі жақын). CM және BN — BCR үшбұрышының биіктіктері болсын. FM, NE және AD түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.

2. A натурал саны үшін $Z(A)$ деп A санын кері ретпен жазылған сан ретінде анықтаймыз (мысалы, $Z(521) = 125$). A саны ***«жақсы»*** деп аталады, егер оның ондық жүйесіндегі жазбасында нөлдер болмаса, бірінші цифры соңғысына тең болмаса және $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. 10^6 үлкен барлық «жақсы» сандарды табыңыз.

3. $m \in \mathbb{N}$ болсын. Кез келген $x, y \in \mathbb{R}^+$ үшін келесі шарт орындалатындай барлық $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ функцияларын табыңыз

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Бұл жердегі $f^{(m)}(y) = \underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс, 1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD, BE и CF. P и Q лежат на отрезках AB и AC соответственно так, что прямая PQ параллельна BC. Окружности построенные на BQ и CP, как на диаметрах, пересекаются в точках R и T (R является ближе к A чем T). Пусть CM и BN – высоты в треугольнике BCR. Докажите, что прямые FM, NE и AD пересекаются в одной точке.

2. Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бóльшие 10^6.

3. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$ выполнено

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Здесь $f^{(m)}(y) = \underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.

Решения заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

10 класс

День 1

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за

слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:
   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 10.1

В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD, BE и CF. P и Q лежат на отрезках AB и AC соответственно так, что прямая PQ параллельна BC. Окружности построенные на BQ и CP, как на диаметрах, пересекаются в точках R и T (R является ближе к A чем T). Пусть CM и BN – высоты в треугольнике BCR. Докажите, что прямые FM, NE и AD пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим окружность диаметра BQ как ω_1, а окружность диаметра CP как ω_2. Докажем, что R лежит на AD. Так как прямая соединяющая центры ω_1 и ω_2 является средней линией трапеции $BPQC$, и как следствие $PQ \parallel BC$, то достаточно доказать, что A лежит на радикальной оси RT.

Пусть ω_1 пересекает AB в точке U, а ω_2 пересекает AC в точке V. Тогда $\angle PUQ = \angle PVQ = 90°$, следовательно, четырехугольник $PUVQ$ – вписанный. Значит $\angle AUV = \angle AQP = \angle ACB$. Отсюда, четырехугольник $UVBC$ вписанный, следовательно, $AU \cdot AB = AV \cdot AC$, значит, A лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2.

Заметим, что B, F, M, E, Q, C лежат на одной окружности имеющий диаметр BC, скажем ω.

$\angle FAR = \angle BAD = \angle BCF = \angle BMF$, откуда следует, что четырехугольник $AFMR$ – вписанный. Аналогичным образом, четырехугольник $AENM$ также вписанный. Тогда из теоремы о радикальных центрах для ω и описанных окружностей четырехугольников $AFMR$ и $AENM$, получаем, что

FM, NE и AD пересекаются в одной точке.

Задача 10.2

Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бóльшие 10^6.

Ответ: 1111112, 2111111.

Решение.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\
\hline
c_{11}\,c_{12}\,\ldots\,c_{1n}\,c_{1\,n+1} \\
c_{21}\,c_{22}\,\ldots\,c_{2n}\,\ldots\,c_{2\,n+1} \qquad\quad \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad \\
c_{n1}\,c_{n2}\,\ldots\,c_{nn} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
\end{array}
$$

Заметим, что если $k \leqslant n+1$ то в $k-$том столбце максимум $k-1$ переходов, в столбце $n+2$ максимум n переходов. В столбце $n+3$ максимум $n-1$ переходов и.т.д.В столбце $2n+1$ максимум 1 переход. Если есть столбец $2n+2$, то в нём нет переходов.

Пусть

$$
\begin{cases}
(\overline{a_0a_1...a_k})^2 = \overline{b_0b_1...b_n}, (1) \\
(\overline{a_ka_{k-1}...a_0})^2 = \overline{b_nb_{n-1}...b_0}. (2)
\end{cases}
$$

Без ограничения общности будем считать, что $a_0 > a_k$. Тогда

из (2) следует, что $a_0^2 \equiv b_0 \pmod{10} \Rightarrow a_0^2 = 10l + b_0$. Тогда из (1) следует, что $b_0 = [\frac{a_0^2}{10}]+$ переходы($[x]-$ целая часть). Пусть $l > 0 \Rightarrow a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49{,}64{,}81$. Но для $a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49$ нужно минимум 3 перехода. Что невозможно так как в столбце $2k+2$ максимум 2 перехода. Если же $a_0^2 = 64{,}81$ то потребуется минимум 2 перехода. Что также невозможно так как в столбце $2k+3$ максимум 1 переход. Противоречие. Значит $a_0^2 = b_0$ и $a_0 = 2{,}3$.

Заметим, что из (1) следует $2a_0a_1+$переходы$\equiv b_1 \pmod{10}$,а из (2) следует, что $2a_0a_1 \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow 2a_0a_1 = b_1$ иначе были бы переходы в (1) при a_0^2. Значит при b_1 нет переходов. Аналогично из (1) следует $S+$переходы$\equiv b_i \pmod{10}$,а из (2) следует, что $S \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow S = b_i$ иначе были бы переходы при b_{i-1}. Значит вообще нет переходов.

Если $k \geqslant 7 \Rightarrow$ коэффициент при 10^{2k-7} в (1) будет минимум $2a_0a_7 + 2a_1a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4 \geqslant 2\cdot2\cdot1+2+2+2 = 10$. То есть был бы переход. Противоречие. Значит $k = 6$.

Рассмотрим коэффициент при 10^6 в (1). Пусть это u. Если $a_0 > 2$ тогда $u \geqslant 2a_0a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 \geqslant 2\cdot3\cdot1 + 2+2+1 = 11$. Противоречие. Если хотя бы один из $a_i(i = 1{,}2{,}...{,}6)$ больше 1. То тогда $u \geqslant 2a_0a_6+2a_1a_5+2a_2a_4+a_3^2 \geqslant 10$. Противоречие. Значит остается только одно число 2111111. Не сложно убедится, что оно удовлетворяет требованием задачи.

Задача 10.3

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$ выполнено

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Здесь $f^{(m)}(y) = \underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.

Ответ: $f(x) = x$.

Решение. Пусть существует такое y_0, что $\dfrac{f(y_0)}{y_0} \neq 1, \dfrac{3}{4}$.

Подставим $y = y_0$, тогда

$$f(f(x)+y_0) - f(x) = \left(\frac{f(y_0)}{y_0} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y_0). \quad (1)$$

Пусть $a = \frac{f(y_0)}{y_0} - 1$,$b = f^{(m)}(y)$ и $g(x) = f(x) + y_0$. Тогда из (1) следует, что

$$g(g(x)) - g(x) - ax = b. \quad (2)$$

Положим $x_0 = g_1$, $g(x_0) = g_2$. Тогда

$$g(g(x)) - g(x) - ax = b \Rightarrow g_{n+2} - g_{n+1} - ag_n = b, n \in \mathbb{N}.$$

Решением будет $u = u_1 + u_2$, где u_1— решение однородного уравнения и u_2 — частное решение неоднородного уравнения.

Очевидно, что корни характеристического уравнения не кратны и не равны 1. Следовательно $u_2 = c$, где c — константа. Отсюда

$$c - c - ac = b \Rightarrow c = -\frac{b}{a}.$$

Найдем u_1. Имеем

$$g_{n+2} - g_{n+1} - ag_n = 0, \quad (3)$$

$$g_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

где x_1,x_2 — корни характеристического уравнения (3), c_1, c_2 — константы.

Тогда

$$\begin{cases} x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 - \dfrac{b}{a}, \\ g(x_0) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 - \dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Значит,

$$g(x) = tx + k$$

где $t = x_1, k = c_2 x_2(x_2 - x_1) + \dfrac{b}{a}(x_1 - 1)$, или

$$t = x_2, k = c_1 x_1(x_1 - x_2) + \frac{b}{a}(x_2 - 1).$$

Подставим в (2), получим $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$ соответственно. То есть

$$g(x) = tx + l \Rightarrow f(x) = tx + q.$$

Подставим в (1)

$$x(t^2 - 2t + \frac{q}{y} + 1) + y(t^m - t) = q\left(\frac{t^m - 1}{t - 1}\right).$$

Так как правая часть не зависит от x, y то $q = 0$. Но тогда

$$x(t^2 - 2t + 1) = -y(t^m - t).$$

Отсюда $t = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$. Противоречие.

Очевидно, что если существует такое x_0, что $f(x_0) = x_0$, то $f(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Легко понять, что $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^+$ подходит, а $f(x) = \frac{3}{4}x$, $x \in \mathbb{R}^+$ нет.