Математика пәні бойынша 2021 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі

Жұмыс уақыты: 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Калькуляторды қолдануға тыйым салынады

9 сынып, 2 күн

4. ABC $(AC > BC)$ үшбұрышы ω шеңберіне іштей сызылған. Осы үшбұрыштың CN биссектрисасы ω–ны M $(M \neq C)$ нүктесінде қияды. BN кесіндісінің бойында кез келген T нүктесі белгіленген. H нүктесі — MNT үшбұрышының ортоцентрі болсын. MNH үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер ω–ны R $(R \neq M)$ нүктесінде қияды. $\angle ACT = \angle BCR$ екенін дәлелдеңіз.

5. Бір уақытта келесі шарттарды қанағаттандыратын натурал $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ (міндетті түрде әртүрлі емес) сандары табылады ма:
i) барлық $1 \leq i < j \leq 100$ үшін, $a_1a_2\ldots a_{100}$ саны $a_i + a_j$ санына бөлінеді;
ii) әрбір $k = 1, 2, \ldots, 100$ үшін, $1 \leq i < j \leq 100$ және $a_1a_2\ldots a_{k-1}a_{k+1}\ldots a_{100}$ саны $a_i + a_j$ санына бөлінбейтіндей i, j индекстері табылады?

6. Натурал n саны берілген. Әрбір $i = 1, 2, \ldots, n$ үшін $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_i^3 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_i)^2$ теңдігі орындалатын болса, онда $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нақты сандар тізбегі *жақсы* деп аталады. Әртүрлі жақсы тізбектердің саны $3^{n-1} + 2^{n-1}$ санынан көп емес екенін дәлелдеңіз. (Кем дегенде бір $i = 1, 2, \ldots, n$ үшін $x_i \neq y_i$ болса, онда $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ және $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ тізбектері әртүрлі болып саналады.)

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2021 года

Время работы: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Использование калькуляторов запрещено

9 класс, 2 день

4. Треугольник ABC $(AC > BC)$ вписан в окружность ω. Биссектриса CN этого треугольника пересекает ω в точке M $(M \neq C)$. На отрезке BN отмечена произвольная точка T. Пусть H — ортоцентр треугольника MNT. Описанная окружность треугольника MNH пересекает ω в точке R $(R \neq M)$. Докажите, что $\angle ACT = \angle BCR$.

5. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ (не обязательно различные), одновременно удовлетворяющие следующим условиям:
i) число $a_1a_2\ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leq i < j \leq 100$;
ii) для каждого $k = 1, 2, \ldots, 100$ найдутся индексы i, j такие, что $1 \leq i < j \leq 100$ и число $a_1a_2\ldots a_{k-1}a_{k+1}\ldots a_{100}$ не делится на $a_i + a_j$?

6. Дано натуральное число n. Последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел называется *хорошей*, если $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_i^3 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_i)^2$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что количество различных хороших последовательностей не больше чем $3^{n-1} + 2^{n-1}$. (Последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ считаются различными, если $x_i \neq y_i$ хотя бы для одного $i = 1, 2, \ldots, n$.)