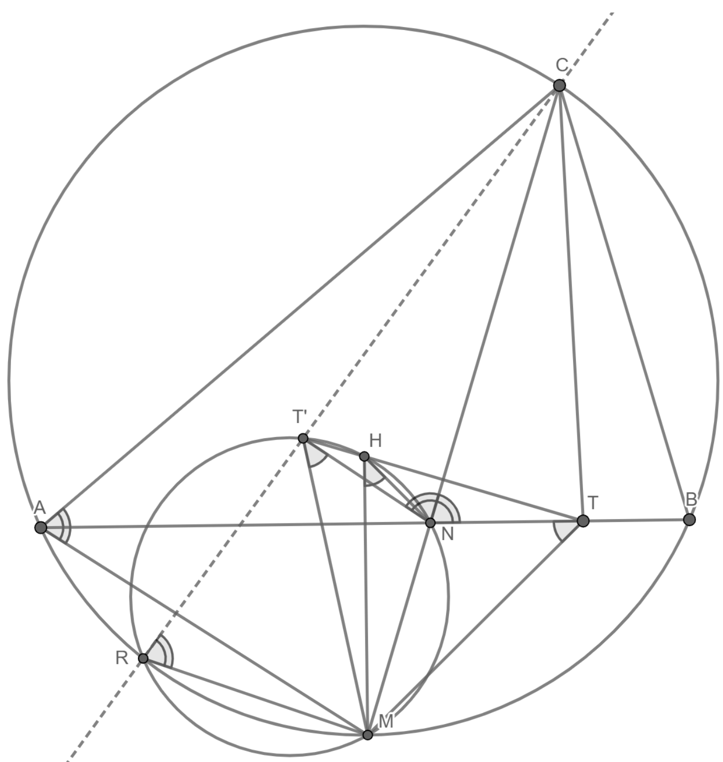
# Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2021 года. Решения задач второго тура

## 9 класс

**9.4.** Треугольник $ABC$ ($AC > BC$) вписан в окружность $\omega$. Биссектриса $CN$ этого треугольника пересекает $\omega$ в точке $M$ ($M \neq C$). На отрезке $BN$ отмечена произвольная точка $T$. Пусть $H$ — ортоцентр треугольника $MNT$. Описанная окружность треугольника $MNH$ пересекает $\omega$ в точке $R$ ($R \neq M$). Докажите, что $\angle ACT = \angle BCR$.

**Решение.** Пусть $T'$ — образ точки $T$ при симметрии относительно прямой $CN$. Тогда $\angle NHM = 90^\circ - \angle HMT = \angle NTM = \angle NT'M$. Значит точки $M$, $N$, $H$, $T'$ и $R$ лежат на одной окружности. Тогда $\angle T'RM = 180^\circ - \angle T'NM = 180^\circ - \angle TNM = \angle CNB = \angle CAB + \angle ACM = \angle CAB + \angle BAM = \angle CAM = \angle CRM$. Следовательно, точки $R$, $T'$, $C$ лежат на одной прямой. Откуда $\angle BCR = \angle BCT' = \angle ACT$, что и требовалось доказать.




**9.5.** Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ (не обязательно различные), одновременно удовлетворяющие следующим условиям:
$i$) число $a_1 a_2 \ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leq i < j \leq 100$;
$ii$) для каждого $k = 1, 2, \ldots, 100$ найдутся индексы $i, j$ такие, что $1 \leq i < j \leq 100$ и число $a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_{100}$ не делится на $a_i + a_j$?

**Ответ.** Да, существуют.

**Решение.** Возьмём какое-нибудь простое число $p > 200$ и числа $a_1, \ldots, a_{100}$ такие, что $a_i \equiv pi \pmod{p^{101}}$ при $1 \leq i \leq 99$ и $a_{100} \equiv p^{100} - p \pmod{p^{101}}$. При этом, очевидно, каждое из 100 чисел $a_i$ будет содержать $p$ ровно в первой степени, сумма $a_1 + a_{100}$ в сотой, а остальные попарные суммы – в первой. Следовательно, произведение всех 100 чисел будет содержать $p$ не в меньшей степени, чем любая из попарных сумм, а произведение любых 99 – в меньшей степени, чем сумма $a_1 + a_{100}$.

Может случиться, что некоторое простое $q \neq p$ содержится в произведении $a_1 \ldots a_{100}$ в меньшей степени, чем в какой-то из попарных сумм. Если домножить все $a_i$ на $q$, то степень, в которой $q$ содержится в каждой из попарных сумм, увеличится на 1, а степень вхождения $q$ в произведение всех чисел – на 100. Проделав такие операции достаточно много раз, мы добьёмся того, чтобы все $q \neq p$ входили в произвдение всех чисел не в меньшей степени, чем в любую из попарных сумм. При этом, очевидно, степени вхождения $p$ в эти числа не изменятся, и новые числа будут удовлетворять условию задачи.

**9.6.** Дано натуральное число $n$. Последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел называется *хорошей*, если $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_i^3 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_i)^2$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что количество различных хороших последовательностей не больше чем $3^{n-1} + 2^{n-1}$. (Последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ считаются различными, если $x_i \neq y_i$ хотя бы для одного $i = 1, 2, \ldots, n$.)

**Решение.** Обозначим через $g(n)$ количество хороших последовательностей длины $n$. Индукцией по $i$ докажем, что все $x_i$ — целые числа и

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i = \frac{j(j+1)}{2}$$

для некоторого $j \in \{0, 1, \ldots, i\}$.

**База.** $i = 1$. Из условия получаем, что $x_1 \in \{0, 1\}$.

**Предположение.** Пусть утверждение верно для $i$.

**Переход.** Докажем для $i + 1$. По условию

$$x_1{}^3 + \ldots + x_{i+1}{}^3 = (x_1 + \ldots + x_{i+1})^2 = (x_1 + \ldots + x_i)^2 + x_{i+1}(x_{i+1} + 2(x_1 + \ldots + x_i)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x_{i+1}{}^3 = x_{i+1}(x_{i+1} + 2(x_1 + \ldots + x_i)) = x_{i+1}(x_{i+1} + j(j+1)). \qquad (1)$$

Если $x_{i+1} = 0$, то переход доказан. Пусть теперь $x_{i+1} \neq 0$. Тогда из (1) получим, что $x_{i+1}{}^2 - x_{i+1} - j(j+1) = 0$, откуда $x_{i+1} = j+1$ или $x_{i+1} = -j$. Значит $x_{i+1}$ — целое, и $x_1 + \ldots + x_{i+1}$ равен одному из чисел $\frac{(j-1)j}{2}$, $\frac{j(j+1)}{2}$, $\frac{(j+1)(j+2)}{2}$ и $\frac{(j-1)j}{2} = \frac{j(j+1)}{2}$ при $j = 0$. Переход доказан.

Пусть $f(i, j)$ — количество хороших последовательностей длины $i$ такие, что $x_1 + \ldots + x_i = \frac{j(j+1)}{2}$, где $0 \leq j \leq i$. Тогда

$$g(n) = f(n, 0) + f(n, 1) + \ldots + f(n, n).$$

Понятно, что $f(1, 0) = f(1, 1) = 1$. Рассмотрим состояние $f(i, j)$. По доказанному выше $x_{i+1}$ равен одному из чисел 0, $j + 1$ или $-j$.

Если $x_{i+1} = 0$, то мы получим состояние $f(i + 1, j)$.

Если $x_{i+1} = j + 1$, то мы получим состояние $f(i + 1, j + 1)$.

Пусть теперь $x_{i+1} = -j$ ($j > 0$, так как мы рассмотрели случаи $x_{i+1} = 0$). Тогда мы получим состояние $f(i + 1, j - 1)$. В итоге мы получим следующие рекуррентные соотношение:

$$f(i+1, 0) = f(i, 0) + f(i, 1),\ f(i+1, j) = f(i, j-1) + f(i, j) + f(i, j+1)$$

для всех $1 \leq j < i$,

$$f(i+1, i) = f(i, i-1) + f(i, i),\ f(i+1, i+1) = f(i, i).$$

Индукцией по $k$ докажем, что $f(k, 0) \geq 2^{k-1}$ и $g(k) \leq 2^{k-1} + 3^{k-1}$.

База: $k = 1$. $f(0, 0) = 1, g(1) = 2$ все верно.

Предположим, что утверждение верно для $k$. Докажем для $k + 1$. Заметим, что

$$f(1, 0) = f(1, 1) \text{ и } f(i+1, 1) = f(i+1, 0) + f(i, 2) \geq f(i+1, 0).$$

Значит $f(k, 1) \geq f(k, 0) \geq 2^{k-1}$, следовательно, $f(k+1, 0) = f(k, 0) + f(k, 1) \geq 2^k$. Также

$$g(k+1) = f(k+1, 0) + \ldots + f(k+1, k+1) = 3(f(k, 0) + \ldots + f(k, k)) - f(k, 0) =$$
$$= 3g(k) - f(k, 0) \leq 3(2^{k-1} + 3^{k-1}) - 2^{k-1} = 2^k + 3^k,$$

что и требовалось доказать.