Математика пәні бойынша 2021 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі

Жұмыс уақыты: 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Калькуляторды қолдануға тыйым салынады

DARYN-M1001 DARYN-M1001 DARYN-M1001

9 сынып, 1 күн

1. $a+b+c+\dfrac{1}{abc}=\dfrac{19}{2}$ теңдігі орындалатындай a,b,c оң нақты сандары берілген. a – ның ең үлкен мүмкін мәнін табыңыз.

2. Энциклопедияның жүз томы 1-ден 100-ге дейін нөмірленген. Олар сөреде рет сақтаусыз қойылып тұр. Бір операцияда кез келген үш томды алып, оларды өз орындарында кез келген ретпен қоюға болады (яғни, егер осы томдар a,b,c орындарында тұрса, онда бұл операциядан кейін осы томдар a,b,c орындарында қалады, бірақ, мүмкін, басқа ретпен). m–нің ең кіші қандай мәнінде, алғашында томдар қалай орналасқанына қарамастан, m операциямен осы томдарды рет сақталатындай орналастыруға болады деп пайымдауға болады? (Егер 1-ші том 1-орында, 2-ші том 2-ші орында, ..., 100-ші том 100-ші орында болса, онда томдар рет сақталуымен тұр деп есептейміз.)

3. $ABCD$ дөңес төртбұрышының AB және CD қабырғаларының созындысы P нүктесінде, ал AC және BD диагональдері Q нүктесінде қиылысады. M және N нүктелері сәйкесінше AC және BD диагональдерінің орталары. BCQ және MNQ үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлер T $(T\neq Q)$ нүктесінде қиылысады. Егер $\angle APD=90^\circ$ болса, онда PT түзуі MN кесіндісінің ортасынан өтетінін дәлелдеңіз.

DARYN-M1001 DARYN-M1001 DARYN-M1001

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2021 года

Время работы: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Использование калькуляторов запрещено

9 класс, 1 день

1. Пусть a,b,c — положительные действительные числа такие, что $a+b+c+\dfrac{1}{abc}=\dfrac{19}{2}$. Найдите наибольшее возможное значение a.

2. На полке стоят в беспорядке 100 томов энциклопедии, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 100. За одну операцию можно взять и любым способом переставить на своих местах любые три тома (т.е. если эти тома стояли в местах a,b,c, то после этой операции эти тома также будут стоять в местах a,b,c, но возможно в другом порядке). При каком наименьшем m можно утверждать, что m такими операциями удастся расставить все тома по порядку, как бы они ни были расставлены первоначально? (Тома стоят по порядку, если 1-й том стоит на 1-м месте, 2-й том на 2-м, ..., 100-й том на 100-м месте.)

DARYN-M1001 DARYN-M1001 DARYN-M1001

3. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD — в точке Q. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников BCQ и MNQ пересекаются в точке T $(T\neq Q)$. Докажите, что если $\angle APD=90^\circ$, то прямая PT делит отрезок MN пополам.