Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2021 года. Решения задач первого тура

---

9 класс

9.1. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $a+b+c+\frac{1}{abc}=\frac{19}{2}$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ. 8.

Решение. Пусть $x=\sqrt[3]{a}$. По неравенству между средним арифметическим и геометрическим получим, что

$$\frac{19}{2}=a+\left(b+c+\frac{1}{abc}\right)\geq a+3\sqrt[3]{b\cdot c\cdot\frac{1}{abc}}=x^3+\frac{3}{x}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x^4+6\leq 19x\Longrightarrow (x-2)(2x^3+4x^2+8x-3)\leq 0,$$

откуда $x\leq 2$. Значит $a\leq 8$. В качестве примера подходит числа $a=8$, $b=c=\frac{1}{2}$.

9.2. На полке стоят в беспорядке 100 томов энциклопедии, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 100. За одну операцию можно взять и любым способом переставить на своих местах любые три тома (т.е. если эти тома стояли в местах a, b, c, то после этой операции эти тома также будут стоять в местах a, b, c, но возможно в другом порядке). При каком наименьшем m можно утверждать, что m такими операциями удастся расставить все тома по порядку, как бы они ни были расставлены первоначально? (Тома стоят по порядку, если 1-й том стоит на 1-м месте, 2-й том на 2-м, ..., 100-й том на 100-м месте.)

Ответ. 50.

Решение. Докажем, что 50 операций всегда достаточно. Одна операция позволяет поставить на место два тома: если тома с номером a стоит на месте тома $b\neq a$, а том b – на месте тома c, то при $c\neq a$ можно поставить a и b на свои места, а на место тома c поставить тот, который сейчас стоит на месте a. Если же $c=a$, можно просто поменять местами a и b, формально добавив в тройку любой из оставшихся томов.

Докажем, что расстановку томов $100, 1, 2, \ldots, 99$ нельзя привести в порядок меньшим числом операций. Для произвольной перестановки томов рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого служат тома, а стрелка от каждого тома идёт к тому, который стоит на его месте. Поскольку в каждой вершине есть по одной входящей и выходящей стрелке, этот граф представляет собой объединение циклов без общих вершин. Перестановке $100, 1, 2, \ldots, 99$ соответствует граф из одного цикла, а расстановке по порядку – граф из 100 циклов (в каждом из которых по одной вершине). Если поменять местами два тома, то есть поменять местами концы двух стрелок, оставив на месте их начала, количество циклов изменится на 1 (если стрелки принадлежали одному циклу, он распадётся на два, а если двум разным, эти циклы объединятся). Любая перестановка трёх томов получается не более, чем двумя обменами двух томов. Это означает, что наша операция меняет количество циклов не более, чем на 2, и получить 100 циклов из одного менее, чем за 50 операций невозможно.

9.3. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD — в точке Q. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников BCQ и MNQ пересекаются в точке T ($T\neq Q$). Докажите, что если $\angle APD=90^\circ$, то прямая PT делит отрезок MN пополам.

Решение. Пусть L — середина отрезка MN. Так как точки M, T, N, Q лежат на одной окружности, то $\angle TMC = \angle TNB$. Аналогично $\angle TBN = \angle TCM$. Следовательно, $\triangle TMC \sim \triangle TNB$. Значит

$$\frac{TM}{TN} = \frac{CM}{BN} = \frac{PM}{PN}. \tag{1}$$

Заметим, что $\angle MPN = 90^\circ - (\angle DPN + \angle APM) = 90^\circ - (\angle PAC + \angle PDB) = \angle ACP - \angle PDB = \angle CQD = = \angle MQN = 180^\circ - \angle MTN$. Следовательно, $\angle MTN + \angle MPN = 180^\circ$. Пусть T'— образ точки T при симметрии относительно точки L. Тогда $MTNT'$ — параллелограмм. Так как $\angle MT'N + \angle MPN = 180^\circ$, то точки P, M, N, T' лежат на одной окружности. Также из (1) следует, что

$$MT' \cdot MP = NT \cdot MP = NP \cdot MT = NT' \cdot NP. \tag{2}$$

Так как $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, то используя (2) получим, что

$$S(PMT') = \frac{1}{2} \cdot MT' \cdot MP \cdot \sin \angle PMT' = \frac{1}{2} \cdot NT' \cdot NP \cdot \sin \angle PNT' = S(PNT').$$

(Здесь $S(XYZ)$ означает площадь треугольника XYZ.) Пусть $PT' \cap MN = R$. Заметим, что

$$PT' \cdot MR \cdot \sin \angle PRM = 2S(PMT') = 2S(PNT') = PT' \cdot NR \cdot \angle T'RN,$$

откуда $MR = RN$. Значит $R = L$. Тогда точки P, T, L и T' лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.