Математика пәні бойынша 2021 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі

Жұмыс уақыты: 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Калькуляторды қолдануға тыйым салынады

11 сынып, 2 күн

4. Сүйірбұрышты ABC үшбұрышы Ω шеңберіне іштей сызылған. Осы үшбұрыштың AD, BE және CF биіктіктері жүргізілген. AD түзуі Ω–ны екінші рет P нүктесінде, ал PF және PE түзулері Ω–ны екінші рет сәйкесінше R және Q нүктелерінде қияды. O_1 және O_2 нүктелері сәйкесінше BFR және CEQ үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлердің центрлері болсын. O_1O_2 түзуі EF кесіндісінің ортасынан өтетінін дәлелдеңіз.

5. a — натурал сан болсын. $x(y^2-2x^2)+x+y+a=0$ теңдеуінің кез келген бүтін (x, y) шешімі үшін $|x| \leq a+\sqrt{2a^2+2}$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.

6. Коэффициенттері нақты сандар болатын $P(x)$ көпмүшесі мен натурал n саны берілген. Кез келген натурал m саны үшін, $P(l)=m^n$ болатындай бүтін l санының табылатыны белгілі. Барлық нақты x саны үшін $P(x)=(ax+b)^k$ теңдігі орындалатындай нақты a, b және натурал k сандарының табылатынын дәлелдеңіз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2021 года

Время работы: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Использование калькуляторов запрещено

11 класс, 2 день

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. В этом треугольнике проведены высоты AD, BE и CF. Прямая AD пересекает Ω вторично в точке P, а прямые PF и PE пересекают Ω вторично в точках R и Q соответственно. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников BFR и CEQ соответственно. Докажите, что прямая O_1O_2 делит отрезок EF пополам.

5. Пусть a — натуральное число. Докажите, что для любого решения (x, y) уравнения

$$x(y^2-2x^2)+x+y+a=0$$

в целых числах выполняется неравенство: $|x| \leq a+\sqrt{2a^2+2}$.

6. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами и натуральное число n. Известно, что для любого натурального m существует целое число l такое, что $P(l)=m^n$. Докажите, что существуют действительные числа a, b и натуральное число k такие, что $P(x)=(ax+b)^k$ при всех действительных x.