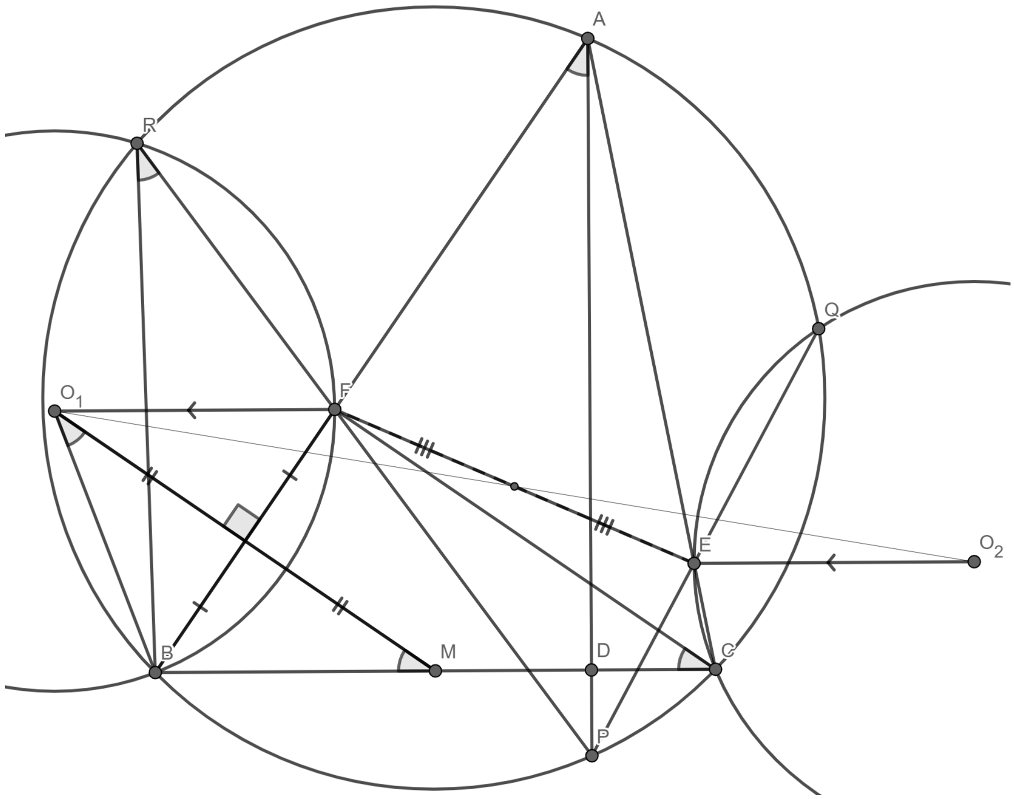
11 класс

11.4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. В этом треугольнике проведены высоты AD, BE и CF. Прямая AD пересекает Ω вторично в точке P, а прямые PF и PE пересекают Ω вторично в точках R и Q соответственно. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников BFR и CEQ соответственно. Докажите, что прямая O_1O_2 делит отрезок EF пополам.

Решение. Пусть M середина BC. Так как $O_1B = O_1F$ и $MB = MF$, то $MO_1 \perp BF$. Следовательно, $MO_1 \parallel CF$. Заметим, что

$$\angle BO_1M = \frac{\angle BO_1F}{2} = \angle BRF = \angle BRP = \angle BAP = 90^\circ - \angle ABC = \angle BCF = BMO_1,$$

то есть четырехугольник O_1FMB — ромб. Следовательно, $O_1F = BM$ и $O_1F \parallel BC$. Аналогично, $EO_2 = CM = BM$ и $EO_2 \parallel BC$. Значит, четырехугольник O_1FO_2E — параллелограмм, то есть O_1O_2 делит FE пополам.



11.5. Пусть a — натуральное число. Докажите, что для любого решения (x, y) уравнения

$$x(y^2 - 2x^2) + x + y + a = 0$$

в целых числах выполняется неравенство: $|x| \le a + \sqrt{2a^2 + 2}$.

Решение. См. решение задачи 10.6.

11.6. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами и натуральное число n. Известно, что для любого натурального m существует целое число l такое, что $P(l) = m^n$. Докажите, что существуют действительные числа a, b и натуральное число k такие, что $P(x) = (ax + b)^k$ при всех действительных x.

Решение. Пусть k – степень многочлена P.

Для каждого натурального t найдём целое число c_t такое, что $P(c_t) = 2^{tkn}$ (если этому условию удовлетворяет несколько чисел, возьмём любое). При этом может оказаться, что c_t и c_{t+1} одного знака для бесконечно многих t, и тогда уравнение $P(y) = 2^{kn}P(x)$ имеет бесконечно много целых решений (x, y) с $xy > 0$: такими решениями являются все пары (c_t, c_{t+1}) с элементами одного знака. Если же это не так, что для всех t, кроме конечного числа, одинаковый знак имеют числа c_t и c_{t+2}; тогда бесконечно много целых решений (x, y) с $xy > 0$ имеет уравнение $P(y) = 4^{kn}P(x)$. В обоих этих случаях оказывается, что для некоторого натурального $d > 1$ уравнение $P(y) = d^k P(x)$ имеет бесконечно много решений в целых числах одного знака. Заменив, если нужно, многочлен $P(x)$ на многочлен $P(-x)$, мы можем считать, что среди этих решений бесконечно много таких, в которых x и y натуральны. Докажем, что из этого свойства многочлена P следует утверждение задачи.

Поскольку многочлен $P(x)$ возрастает на некотором луче $(x_0, +\infty)$, при некотором положительном M из неравенства $M < P(x) < P(y)$ для положительных x и y следует, что $x < y$. В частности, если $M < P(x) < P(y) < P(x+1)$ для некоторого натурального x и положительного y, то число y – не целое.

Рассмотрим два старших коэффициента многочлена $P(x)$:

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots$$

Существует единственное s_0 такое, что два старших коэффициента многочлена $P(dx + s_0)$ отличаются от них умножением на d^k:

$$P(dx + s_0) = d^k a_k x^k + d^k a_{k-1} x^{k-1} + \dots$$

Действительно, $P(dx + s_0) = d^k a_k x^k + d^{k-1}(a_{k-1} + ka_k s_0)x^{k-1} + \dots$, то есть s_0 находится из линейного уравнения $a_{k-1} + ka_k s_0 = da_{k-1}$.

Разберём два случая.

I. Число s_0 не целое. Обозначим $s' = [s_0]$. Многочлен $P(dx + s')$ имеет такой же коэффициент при x^k, как многочлен $d^k P(x)$, и меньший коэффициент при x^{k-1} (так как $d^{k-1}(a_{k-1} + ka_k s') < d^{k-1}(a_{k-1} + ka_k s_0) = d^k a_{k-1}$). Это значит, что $P(dx + s') < d^k P(x)$ при всех достаточно больших x. Аналогично $P(dx + s' + 1) > d^k P(x)$ при всех достаточно больших x. В силу сделанного выше замечания это значит, что при достаточно больших x число $d^k P(x)$ не является значением многочлена P в натуральной точке, а это противоречит условию задачи.

II. Число s_0 целое. Действуя так же, как и в случае I, получим, что

$$P(dx + s_0 - 1) < d^k P(x) < P(dx + s_0 + 1)$$

при всех достаточно больших x. Если (x, y) – достаточно большое решение уравнения $P(y) = d^k P(x)$ в натуральных числах, из полученного неравенства следует, что $y = dx + s_0$. Таким образом, равенство

$$P(dx + s_0) = d^k P(x) \qquad (*)$$

выполняется для бесконечно многих значений x. Поскольку это равенство двух многочленов, оно выполняется при всех x.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x - \frac{s_0}{d-1})$. После выражения многочлена P через Q равенство (*) принимает вид

$$Q(dx + s_0 + \frac{s_0}{d-1}) = d^k Q(x + \frac{s_0}{d-1}),$$

то есть, так как $dx + s_0 + \frac{s_0}{d-1} = d(x + \frac{s_0}{d-1})$,

$$Q(dy) = d^k Q(y)$$

при всех вещественных x. Если $Q(y) = b_k y^k + b_{k-1}y^{k-1} + \dots + b_0$, получаем тождество

$$d^k b_k y^k + d^{k-1} b_{k-1} y^{k-1} + \dots + b_0 = d^k b_k y^k + d^k b_{k-1} y^{k-1} + \dots + d^k b_0.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем, что $b_{k-1} = \dots = b_0 = 0$, то есть многочлен $Q(x)$ имеет вид ax^k. Делая обратную замену $P(x) = Q(x + \frac{s_0}{d+1})$, получаем утверждение задачи.