Математика пәні бойынша 2021 жылғы Республикалық олимпиаданың қорытынды кезеңі

Жұмыс уақыты: 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Калькуляторды қолдануға тыйым салынады

11 сынып, 1 күн

1. Энциклопедияның жүз томы 1-ден 100-ге дейін нөмірленген. Олар сөреде рет сақтаусыз қойылып тұр. Бір операцияда кез келген үш томды алып, оларды өз орындарында кез келген ретпен қоюға болады (яғни, егер осы томдар a, b, c орындарында тұрса, онда бұл операциядан кейін осы томдар a, b, c орындарында қалады, бірақ, мүмкін, басқа ретпен). m–нің ең кіші қандай мәнінде, алғашында томдар қалай орналасқанына қарамастан, m операциямен осы томдарды рет сақталатындай орналастыруға болады деп пайымдауға болады? (Егер 1-ші том 1-орында, 2-ші том 2-ші орында, ..., 100-ші том 100-ші орында болса, онда томдар рет сақталуымен тұр деп есептейміз.)

2. $\left[\sqrt{a^2n}+\sqrt{b^2n+1}\right]=\left[\sqrt{(a+b)^2n+3}\right]$ теңдігі кез келген натурал n саны үшін орындалатындай, шексіз көп натурал (a, b) $(a \neq b)$ жұптарының табылатынын дәлелдеңіз. (Бұл жерде $[x]$ — ол x санының бүтін бөлігі, яғни x санынан аспайтын ең үлкен бүтін сан.)

3. ABC үшбұрышының ішінен $\max(\angle MAB, \angle MBC, \angle MCA) = \angle MCA$ болатындай M нүктесі алынған. $\sin\angle MAB + \sin\angle MBC \leq 1$ екенін дәлелдеңіз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2021 года

Время работы: 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Использование калькуляторов запрещено

11 класс, 1 день

1. На полке стоят в беспорядке 100 томов энциклопедии, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 100. За одну операцию можно взять и любым способом переставить на своих местах любые три тома (т.е. если эти тома стояли в местах a, b, c, то после этой операции эти тома также будут стоять в местах a, b, c, но возможно в другом порядке). При каком наименьшем m можно утверждать, что m такими операциями удастся расставить все тома по порядку, как бы они ни были расставлены первоначально? (Тома стоят по порядку, если 1-й том стоит на 1-м месте, 2-й том на 2-м, ..., 100-й том на 100-м месте.)

2. Докажите, что существует бесконечно много пар (a, b) натуральных чисел таких, что $a \neq b$ и для любого натурального n выполняется равенство

$$\left[\sqrt{a^2n}+\sqrt{b^2n+1}\right]=\left[\sqrt{(a+b)^2n+3}\right].$$

(Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

3. Внутри треугольника ABC взята такая точка M, что $\max(\angle MAB, \angle MBC, \angle MCA) = \angle MCA$. Докажите, что $\sin\angle MAB + \sin\angle MBC \leq 1$.