11 класс

11.1. На полке стоят в беспорядке 100 томов энциклопедии, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 100. За одну операцию можно взять и любым способом переставить на своих местах любые три тома (т.е. если эти тома стояли в местах a, b, c, то после этой операции эти тома также будут стоять в местах a, b, c, но возможно в другом порядке). При каком наименьшем m можно утверждать, что m такими операциями удастся расставить все тома по порядку, как бы они ни были расставлены первоначально? (Тома стоят по порядку, если 1-й том стоит на 1-м месте, 2-й том на 2-м, ..., 100-й том на 100-м месте.)

Решение. См. решение задачи 9.2.

11.2. Докажите, что существует бесконечно много пар (a, b) натуральных чисел таких, что $a \neq b$ и для любого натурального n выполняется равенство

$$\left[\sqrt{a^2n} + \sqrt{b^2n+1}\right] = \left[\sqrt{(a+b)^2n+3}\right].$$

(Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Решение. Докажем, что подходят все пары вида $(2k, k)$, где k — натуральное число. Действительно, пусть n — произвольное натуральное число. Обозначим

$$x = \sqrt{a^2n} + \sqrt{b^2n+1}, \quad y = \sqrt{(a+b)^2 n + 3}, \quad s = k^2n.$$

Заметим, что

$$y^2 - x^2 = 2\left(abn + 1 - \sqrt{(abn)^2 + a^2n}\right) = 2\left(1 - \frac{a^2n}{abn + \sqrt{(abn)^2 + a^2n}}\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{2kn}{kn + \sqrt{k^2n^2+n}}\right) = 2\left(1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{s}}}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{s+1} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+1} + \sqrt{s}} = \frac{2}{\left(\sqrt{s+1} + \sqrt{s}\right)^2}. \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$0 < y^2 - x^2 < \frac{1}{2s}. \tag{2}$$

Так как $x + y > 6\sqrt{s}$, то из (2) получим, что

$$0 < y - x = \frac{y^2 - x^2}{y + x} < \frac{1}{12s\sqrt{s}}. \tag{3}$$

Лемма. Для любого натурального m выполнено неравенство $\{\sqrt{9m+3}\} > \dfrac{1}{4\sqrt{m}}$.

Доказательство. Пусть $v = \left[\sqrt{9m+3}\right]$, откуда $v^2 \leq 9m+3$. Так как $v^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod 9$, то $v^2 \leq 9m+1$. Тогда

$$\{\sqrt{9m+3}\} = \sqrt{9m+3} - v \geq \sqrt{9m+3} - \sqrt{9m+1} = \frac{2}{\sqrt{9m+3} + \sqrt{9m+1}} > \frac{1}{\sqrt{9m+3}} > \frac{1}{4\sqrt{m}}.$$

Используя лемму и (3) получим, что $y - [y] = \{y\} = \{\sqrt{9s+3}\} > \dfrac{1}{4\sqrt{s}} > y - x$, откуда $[y] < x < y$. Значит $[x] = [y]$, что и требовалось доказать.

11.3. Внутри треугольника ABC взята такая точка M, что $\max(\angle MAB, \angle MBC, \angle MCA) = \angle MCA$. Докажите, что $\sin\angle MAB + \sin\angle MBC \le 1$.

Первое решение. Заметим, что среди трёх углов $\angle MCA$, $\angle MAB$, $\angle MBC$ не может быть двух неострых (они вкладываются в углы треугольника ABC). Значит, исследуемые два угла острые.

1) Зафиксируем точки M, B, C и будем двигать точку A' по отрезку AM от A к M. Угол $\angle MCA'$ будет непрерывно уменьшаться, угол $\angle MA'B$ — непрерывно увеличиваться, угол $\angle MBC$ не будет меняться. Поскольку в финальном положении имеем $\angle MCA' = 0 < \angle MBC$, в некоторый момент угол $\angle MCA'$ станет равен одному из углов $\angle MA'B$ или $\angle MBC$, оставаясь не меньше другого. По замечанию в начале решения, теперь все три угла острые. Значит, достаточно доказать неравенство для новой конфигурации.

Итак, считаем, без ограничения общности, что $\angle MCA = \angle MAB \ge \angle MBC$. Тогда окружность AMC касается AB.

2) Пусть CM пересекает AB в точке K. Пусть B' — точка, симметричная точке A относительно K. Тогда $KB'^2 = KA^2 = KM \cdot KC$, так что окружность CMB' касается AB. Поскольку B находится вне этой окружности, получаем $\angle MBC \le \angle MB'C$.

Если $\angle MB'C \ge \angle MCA$, то на отрезке BB' можно выбрать точку B^* такую, что $\angle MB^*C = \angle MCA = \varphi$. Пусть X, Y, Z основание перпендикуляра из точки M на стороны AB^*, B^*C, CA. По неравенству Эрдеша-Морделла $MA + MB^* + MC \ge 2(MX + MY + MZ) = 2\sin\varphi(MA + MB^* + MC)$, следовательно $\varphi \le \pi/6$, откуда и следует требуемое. (Неравенство Эрдеша-Морделла: для произвольнои точки S внутри треугольника, сумма расстоянии от S до вершин треугольника не меньше, чем удвоенная сумма расстоянии от S до сторон треугольника.)

Иначе имеем $\angle MB'C < \angle MCA$, и в треугольнике $AB'C$ по-прежнему все углы $\angle MCA$, $\angle MAB'$, $\angle MB'C$ острые. Поэтому достаточно доказать утверждение для точки B, заменённой на B'. Таким образом, мы свели задачу к случаю, когда CK — медиана треугольника ABC, а окружности CMA и CMB касаются AB, то есть $\angle MBA = \angle MCB$ и $\angle MCA = \angle MAB$. При этом $\angle MBC \le \angle MCA$, откуда

$$\beta = \angle ABC = \angle MBA + \angle MBC \le \angle MCB + \angle MCA = \angle BCA = \gamma.$$

3) Пусть BM и CM пересекают окружность ABC в точках L и T соответственно. Тогда $\angle ABT = \angle ACT = \angle MAB$, так что $BT \parallel AM$; аналогично, $AT \parallel BM$, так что $AMBT$ – параллелограмм. Считая, что диаметр окружности ABC равен 1, получаем $\sin\angle MAB = \sin\angle MCA = AT = BM$.

Далее, $\angle CLM = \angle CAB = \alpha$, и из касания $\angle CML = \angle CBA = \beta$, так что $\angle MCL = \gamma$. Поскольку $\beta \le \gamma$, получаем $\sin\angle MBC = CL \le LM$. Итак,

$$\sin\angle MAB + \sin\angle MBC = AT + CL \le BM + LM = BL \le 1,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Предположим противное. Обозначим $\angle MAB = x$, $\angle MBC = y$, $\angle MCA = z$, $\angle MBA = \alpha$, $\angle MCB = \beta$, $\angle MAC = \gamma$. Рассмотрим случаи $x \le y$ (случай $x \ge y$ аналогичен). Тогда $x \le y \le z$ и $x + y + z < 180°$, следовательно, $\sin x \le w \le \sin z$, где $w = \sin y$. По предположению $\sin x > 1 - w$ и $w > \dfrac{1}{2}$. По тригонометрической теореме Чевы

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin x \sin y \sin z > w^2(1 - w). \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sin t$, где $t \in (0, \pi)$. Заметим, что $f'(t) = \cos t$ и $f''(t) = -\sin t < 0$. Значит данная функция вогнутая. По неравенству Йенсена

$$S = \sin z + \sin y + \sin x + \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) и по неравенству Коши имеем, что

$$3 \geq S \geq 2w + 4\sqrt[4]{\sin x \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} > 2w + 4\sqrt{w(1-w)} \Rightarrow (3-2w)^2 > 16w(1-w) \Rightarrow 20w^2 - 28w + 9 > 0.$$

Так как $w > \dfrac{1}{2}$, то из последнего неравенство следует, что $w > \dfrac{9}{10} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Значит $y > 60^\circ$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi - x - y - z < \pi - 2y < \pi$, то по неравенству Коши и Йенсена получим, что

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3 \leq \left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 < \left(\sin\frac{\pi - 2y}{3}\right)^3. \tag{3}$$

Из (1) и (3) получим, что

$$4w^2(1-w) < 4\left(\sin\frac{\pi-2y}{3}\right)^3 = 3\sin\left(\frac{\pi-2y}{3}\right) - \sin 2y. \tag{4}$$

(Последнее равенство следует из формулы $\sin 3t = 3\sin t - 4(\sin t)^3$.) Так как $y \leq z$, то $y < 90^\circ$.

Рассмотрим функцию

$$g(t) = 3\sin\left(\frac{\pi - 2t}{3}\right) - \sin 2t - 4(\sin t)^2 + 4(\sin t)^3$$

в промежутке $t \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$g'(t) = -2\cos\left(\frac{\pi-2t}{3}\right) - 2\cos 2t - 8\sin t\cos t + 12(\sin t)^2\cos t =$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi-2t}{3}\right) + 2 - 4(\cos t)^2 - 8\sin t\cos t + 12(\sin t)^2\cos t \geq 4\cos t(3(\sin t)^2 - 2\sin t - \cos t). \tag{5}$$

Пусть $h(t) = 3(\sin t)^2 - 2\sin t - \cos t$. Тогда $h'(t) = 6\sin t\cos t - 2\cos t + \sin t > 2\cos t(3\sin t - 1) \geq 0$, следовательно h — возрастающая функция. Поэтому $h(t) \geq h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{4} > 0$. Тогда из (5) следует, что $g'(t) \geq 0$. Значит g — неубывающая функция, поэтому $g(y) \leq g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Неравенство (4) неверно, противоречие.