

Математика пәні бойынша 2021 жылғы Республикалық  
олимпиаданың қорытынды кезеңі

Жұмыс уақыты: 4 сағат

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

Калькуляторды қолдануға тыйым салынады

10 сынып, 2 күн

4.  $ABC$  үшбұрышының  $AC$  қабырғасында  $BC = DC$  болатындай  $D$  нүктесі табылсын.  $J$  нүктесі —  $ABD$  үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің центрі.  $J$  нүктесінен  $ABC$  үшбұрышына іштей сызылған шеңберге жүргізілген жанамалардың біреуі  $BD$  түзуіне параллель екенін дәлелдеңіз.

5. Кез келген  $x, y \in R^+$  үшін  $f(x)^2 = f(xy) + f(x + f(y)) - 1$  теңдігі орындалатындай барлық  $f : R^+ \rightarrow R^+$  функцияларын табыңыз. (Бұл жерде  $R^+$  — оң нақты сандар жиыны.)

6.  $a$  — натурал сан болсын.  $x(y^2 - 2x^2) + x + y + a = 0$  теңдеуінің кез келген бүтін  $(x, y)$  шешімі үшін  $|x| \leq a + \sqrt{2a^2 + 2}$  теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады  
школьников по математике 2021 года

Время работы: 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

Использование калькуляторов запрещено

10 класс, 2 день

4. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  нашлась такая точка  $D$ , что  $BC = DC$ . Пусть  $J$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABD$ . Докажите, что одна из касательных из точки  $J$  ко вписанной окружности треугольника  $ABC$  параллельна прямой  $BD$ .

5. Найдите все функции  $f : R^+ \rightarrow R^+$  такие, что  $f(x)^2 = f(xy) + f(x + f(y)) - 1$  для любых  $x, y \in R^+$ . (Здесь  $R^+$  — множество положительных действительных чисел.)

6. Пусть  $a$  — натуральное число. Докажите, что для любого решения  $(x, y)$  уравнения

$$x(y^2 - 2x^2) + x + y + a = 0$$

в целых числах выполняется неравенство:  $|x| \leq a + \sqrt{2a^2 + 2}$ .